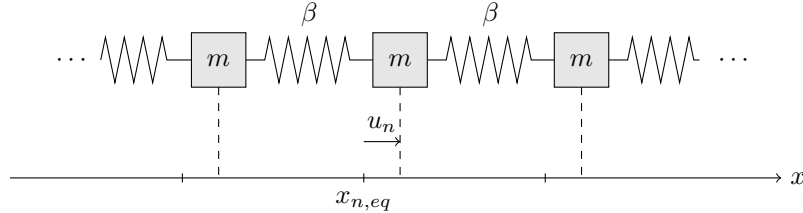


# De la topologie dans les ondes : de la matière condensée à El Niño

## Partie I - Chaînes masse-ressort

### 1. Chaîne monoatomique



1. On cherche à déterminer l'équation du mouvement pour la \$n\$-ième masse. On va dans un premier temps faire le bilan des forces exercées sur la masse numéroté \$n\$, on a,

$$\vec{F}_{n-1 \rightarrow n} = \beta(u_{n-1} - u_n)\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{F}_{n+1 \rightarrow n} = \beta(u_{n+1} - u_n)\vec{e}_x$$

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique à la masse \$n\$ projeté sur l'axe \$Ox\$ on obtient l'équation du mouvement cherchée,

$$m\ddot{u}_n = \beta(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

2. On cherche maintenant à résoudre cette équation, on suit l'indication de l'énoncé de passer en notations complexes  $\underline{u}_n = \underline{U}_0 e^{i(kna - \omega t)}$ . On obtient donc en réécrivant les termes de l'équation,

$$\underline{u}_{n\pm 1} = \underline{u}_n e^{\pm ika} \quad \ddot{\underline{u}}_n = -\omega^2 \underline{u}_n$$

Ainsi l'équation du mouvement devient,

$$-m\omega^2 = \beta(e^{ika} + e^{-ika} - 2) \quad \longrightarrow \quad \omega^2 = -\frac{2\beta}{m}(\cos ka - 1)$$

En posant  $2\theta = ka$  et en s'aidant de la formule trigonométrique rappelé par l'énoncé on obtient,

$$\omega^2 = \frac{4\beta}{m} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

Ainsi la relation de dispersion s'écrit,

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{\beta}{m}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

3. On étudie maintenant la périodicité de la relation de dispersion obtenue à la question précédente, afin de déterminer l'intervalle correspondant à la première zone de Brillouin. On remarque que,

$$\sin\left(\frac{(k + \frac{2\pi}{a})a}{2}\right) = \sin\left(\frac{ka}{2} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

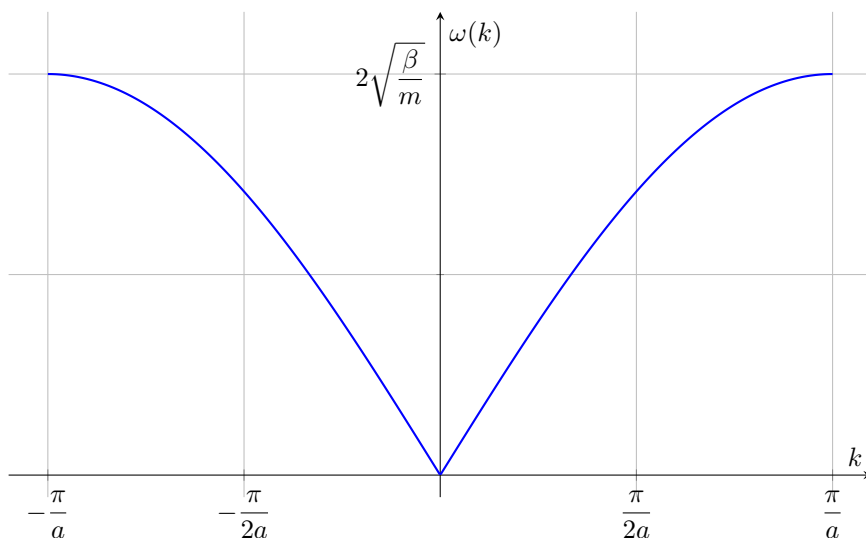
Comme la relation de dispersion fait intervenir la valeur absolue du sinus, on a,

$$\omega\left(k + \frac{2\pi}{a}\right) = \omega(k)$$

Ainsi,  $\omega(k)$  est une fonction paire et périodique de période  $2\pi/a$ . On choisit donc l'intervalle de longueur  $2\pi/a$  centré sur l'origine comme première zone de Brillouin. On obtient donc,

$$\boxed{-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}}$$

4. Faisons la représentation de la relation de dispersion dans la première zone de Brillouin,



5. Étudions la pente en  $k = 0$  dans la première zone de Brillouin, c'est-à-dire la vitesse de groupe dans la limite des grandes longueurs d'onde. Elle est définie par,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Lorsque  $k \rightarrow 0$ , on a  $\sin(ka/2) \sim ka/2$ , ce qui donne,

$$\omega(k) \sim 2\sqrt{\frac{\beta}{m}} \cdot \frac{|k|a}{2} = a\sqrt{\frac{\beta}{m}} |k|$$

La relation de dispersion étant paire, on peut restreindre l'étude à  $k > 0$  dans la première zone de Brillouin. On obtient alors, au voisinage de  $k = 0$ ,

$$\omega(k) \sim a\sqrt{\frac{\beta}{m}} k \implies v_g(0^+) = a\sqrt{\frac{\beta}{m}}$$

Cette pente correspond à la vitesse de propagation des ondes de grande longueur d'onde ( $\lambda \gg a$ ). Dans ce régime, les variations de déplacement entre masses voisines sont faibles devant la distance interatomique, si bien que le milieu discret apparaît comme continu. La chaîne se comporte alors comme un milieu élastique homogène, et la vitesse obtenue s'identifie à la **vitesse du son** dans ce matériau équivalent. Cette grandeur correspond à la vitesse de groupe  $v_g$ , c'est-à-dire la vitesse de propagation de l'énergie et de l'information transportées par un paquet d'ondes.

6. Déterminons la vitesse de groupe pour  $k = \pm \pi/a$ . Comme la relation de dispersion est paire, on peut se restreindre à  $k > 0$ . La vitesse de groupe est donnée par,

$$v_g(k) = \frac{d\omega}{dk} = 2\sqrt{\frac{\beta}{m}} \cdot \frac{a}{2} \cos\left(\frac{ka}{2}\right) = a\sqrt{\frac{\beta}{m}} \cos\left(\frac{ka}{2}\right)$$

En évaluant en  $k = \frac{\pi}{a}$ ,

$$v_g\left(\frac{\pi}{a}\right) = a\sqrt{\frac{\beta}{m}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Par symétrie de la relation de dispersion, on a également  $v_g\left(-\frac{\pi}{a}\right) = 0$ .

Une vitesse de groupe nulle signifie que l'énergie ne se propage pas. L'onde correspondante est une onde stationnaire car les masses voisines oscillent en opposition de phase. Il s'agit de la fréquence maximale du système,  $\omega_{\max} = 2\sqrt{\beta/m}$ . Ainsi, aux bords de la première zone de Brillouin, les ondes ne se propagent pas et restent confinées autour de leur source.

- 7.1. On cherche une solution sous la forme d'une onde plane,  $\underline{u}_n = \underline{U}_0 e^{i(kna - \omega t)}$ . On a d'après la relation de dispersion établie à la question 2, pour un nombre d'onde réel  $k$ ,

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{\beta}{m}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

Or cette fonction est bornée,

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \omega(k) \leq 2\sqrt{\frac{\beta}{m}}$$

Et la pulsation imposée par la source est  $\omega = \alpha\sqrt{\beta/m}$  avec  $\alpha > 2$ , on a donc,

$$\omega > 2\sqrt{\frac{\beta}{m}}$$

Aucun nombre d'onde réel  $k$  ne peut satisfaire la relation de dispersion. Par conséquent, pour que la forme exponentielle reste formellement solution de l'équation du mouvement, on est conduit à introduire un nombre d'onde complexe,

$$\underline{k} = k' + ik'' \quad (k'' \neq 0)$$

L'onde s'écrit alors  $\underline{u}_n = \underline{U}_0 e^{i(k'na - \omega t)} e^{-k''na}$ , traduisant une amplitude exponentiellement décroissante (ou croissante) avec  $n$ , caractéristique d'un régime évanescent.

- 7.2. On a  $\omega = \alpha\sqrt{\beta/m}$  avec  $\alpha > 2$ . En remplaçant dans la relation de dispersion établie à la question 2 (valable même pour  $\underline{k}$  complexe), on obtient,

$$\omega^2 = \frac{4\beta}{m} \sin^2\left(\frac{\underline{k}a}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \sin^2\left(\frac{\underline{k}a}{2}\right) = \frac{\alpha^2}{4} > 1$$

Posons  $\underline{k} = k' + ik''$  avec  $k'' \neq 0$  et écrivons,

$$\sin\left(\frac{\underline{k}a}{2}\right) = \sin\left(\frac{k'a}{2} + i\frac{k''a}{2}\right) = \underbrace{\sin\left(\frac{k'a}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{k''a}{2}\right)}_X + i \underbrace{\cos\left(\frac{k'a}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{k''a}{2}\right)}_Y$$

Alors,

$$\sin^2\left(\frac{\underline{k}a}{2}\right) = (X^2 - Y^2) + 2iXY$$

Pour que cette quantité soit réelle, il faut que sa partie imaginaire soit nulle et sa partie réelle strictement positive. On doit donc avoir

$$XY = 0 \quad \text{et} \quad X^2 - Y^2 > 0$$

Distinguons deux cas :

- Si  $X = 0$ , alors  $\sin^2 = -Y^2 \leq 0$ , ce qui est incompatible avec  $\sin^2 = \alpha^2/4 > 0$
- Donc nécessairement  $Y = 0$ .

Ainsi  $Y = 0$ , ce qui implique,

$$\cos(k'a/2) \operatorname{sh}(k''a/2) = 0$$

Comme  $k'' \neq 0$ , on a  $\operatorname{sh}(k''a/2) \neq 0$ , d'où,

$$\cos(k'a/2) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{k'a}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad \longrightarrow \quad k' = \frac{(2m+1)\pi}{a}$$

Dans la première zone de Brillouin  $[-\pi/a, \pi/a]$ , les seules valeurs possibles sont  $k' = \pi/a$  (pour  $m = 0$ ) et  $k' = -\pi/a$  (pour  $m = -1$ ). Par convention (onde se propageant vers les  $x > 0$ ), on retient  $k' = \pi/a$ . Ainsi,

$$\boxed{k' = \frac{\pi}{a}}$$

7.3. D'après la question 7.2, dans la première zone de Brillouin, la partie réelle du nombre d'onde complexe  $\underline{k} = k' + ik''$  est nécessairement,

$$k' = \pm \frac{\pi}{a}$$

En substituant dans la relation de dispersion, sachant que  $\sin(\underline{k}a/2)$  est réel, que  $\cos(k'a/2) = 0$  et que  $|\sin(k'a/2)| = 1$ , on obtient,

$$\left| \sin\left(\frac{\underline{k}a}{2}\right) \right| = \operatorname{ch}\left(\frac{k''a}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

La fonction  $\operatorname{ch}$  est paire et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  ; l'équation  $\operatorname{ch}(k''a/2) = \alpha/2$  (avec  $\alpha/2 > 1$ ) admet exactement deux solutions opposées,

$$\boxed{k'' = \pm \kappa, \quad \kappa = \frac{2}{a} \operatorname{arcosh}\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0}$$

Ainsi, le nombre d'onde complexe  $\underline{k}$  peut a priori prendre quatre formes,

$$\underline{k} = \frac{\pi}{a} \pm i\kappa \quad \text{ou} \quad \underline{k} = -\frac{\pi}{a} \pm i\kappa$$

Cependant, la solution physique  $\underline{u}_n(t) = \underline{U}_0 e^{i(k'na - \omega t)} e^{-k''na}$  doit rester bornée lorsque  $|n| \rightarrow \infty$  (chaîne infinie avec une source localisée en  $n = 0$ ). Étudions le comportement de l'amplitude  $e^{-k''na}$  :

- Pour  $n > 0$ , la non-divergence quand  $n \rightarrow +\infty$  impose  $e^{-k''na} \rightarrow 0$ , soit  $k'' > 0$ .
- Pour  $n < 0$ , écrivons  $n = -|n|$  ; l'amplitude devient  $e^{-k''(-|n|)a} = e^{k''|n|a}$ . Pour que cette quantité tende vers 0 lorsque  $|n| \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow -\infty$ ), il faut  $k'' < 0$ .

Par conséquent, on retient deux valeurs distinctes du nombre d'onde, adaptées à chaque demi-droite,

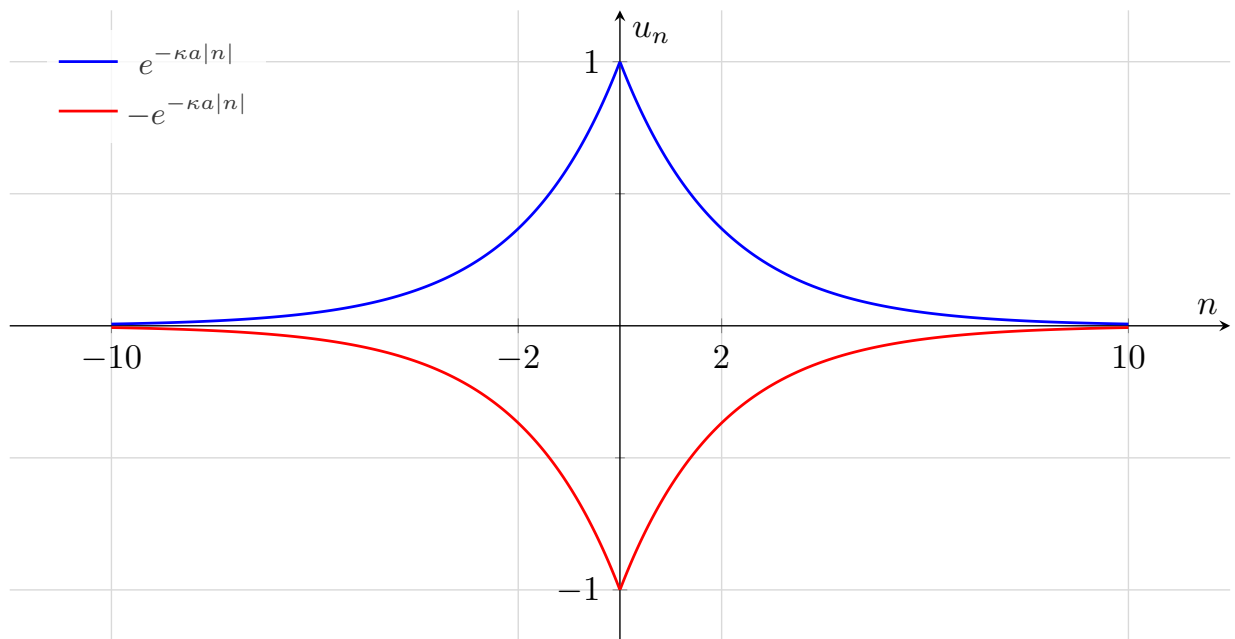
$$\boxed{\underline{k} = \pm \frac{\pi}{a} + i\kappa \quad \text{pour } n > 0}$$

$$\boxed{\underline{k} = \pm \frac{\pi}{a} - i\kappa \quad \text{pour } n < 0}$$

La solution globale s'écrit alors, à une constante près,

$$\boxed{u_n(t) = U_0 (-1)^n e^{-\kappa|n|a} e^{-i\omega t}}$$

7.4. Traçons maintenant le graphe de la solution correspondant à une suite discrète alternée  $(-1)^n$ , dont l'amplitude est donnée par l'enveloppe exponentielle  $e^{-\kappa a|n|}$ .



7.5. La solution précédemment obtenue correspond à une onde évanescente : son amplitude décroît exponentiellement avec la distance à la source, comme le montre le graphe précédent. Elle reste donc localisée au voisinage de la source. De plus, il n'y a pas de propagation d'énergie dans la chaîne d'atomes. Cette situation se produit lorsque la pulsation imposée est en dehors de la bande des fréquences propres du système. Autrement dit lorsque,

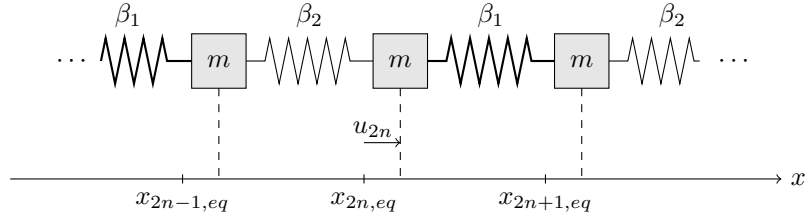
$$\omega > 2\sqrt{\frac{\beta}{m}}$$

À l'inverse, lorsque  $\omega$  appartient à l'intervalle

$$0 \leq \omega \leq 2\sqrt{\frac{\beta}{m}}$$

les solutions correspondent à des ondes propagatives : l'énergie peut alors se transmettre le long de la chaîne.

## 2. Chaîne dimérisée : le modèle SSH mécanique



8. On cherche à déterminer l'équation du mouvement pour la  $2n$ -ième masse. On va dans un premier temps faire le bilan des forces exercées sur la masse numéroté  $2n$ , on a,

$$\vec{F}_{2n-1 \rightarrow 2n} = \beta_2(u_{2n-1} - u_{2n})\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{F}_{2n+1 \rightarrow 2n} = \beta_1(u_{2n+1} - u_{2n})\vec{e}_x$$

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique à la masse  $2n$  projeté sur l'axe  $Ox$  on obtient l'équation du mouvement de la masse  $2n$ ,

$$m\ddot{u}_{2n} = \beta_2 u_{2n-1} + \beta_1 u_{2n+1} - u_{2n}(\beta_1 + \beta_2)$$

En procédant de manière équivalente, on l'équation du mouvement de la masse  $2n + 1$ ,

$$m\ddot{u}_{2n+1} = \beta_1 u_{2n} + \beta_2 u_{2n+2} - u_{2n+1}(\beta_1 + \beta_2)$$

9. On cherche des solutions adaptées à la nouvelle maille du réseau sous la forme,

$$\begin{pmatrix} u_{2n}(t) \\ u_{2n+1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix} e^{i(2kna - \omega t)}$$

Il faut donc réécrire les termes décalés, en remarquant que,

$$\begin{cases} 2n - 1 = 2(n - 1) + 1 & \longrightarrow \underline{u}_{2n-1} = \underline{U}_1 e^{i(2k(n-1)a - \omega t)} = \underline{U}_1 e^{-2ika} e^{i(2kna - \omega t)} \\ 2n + 2 = 2(n + 1) & \longrightarrow \underline{u}_{2n+2} = \underline{U}_0 e^{i(2k(n+1)a - \omega t)} = \underline{U}_0 e^{2ika} e^{i(2kna - \omega t)} \end{cases}$$

De plus,

$$\underline{\ddot{u}}_{2n} = -\omega^2 \underline{U}_0 e^{i(2kna - \omega t)} \quad \text{et} \quad \underline{\ddot{u}}_{2n+1} = -\omega^2 \underline{U}_1 e^{i(2kna - \omega t)}$$

En remplaçant dans les équations du mouvement obtenues à la question précédente et en simplifiant par le facteur commun  $e^{i(2kna - \omega t)}$ , on obtient

$$\begin{cases} -m\omega^2 \underline{U}_0 = \beta_2 \underline{U}_1 e^{-2ika} + \beta_1 \underline{U}_1 - (\beta_1 + \beta_2) \underline{U}_0 \\ -m\omega^2 \underline{U}_1 = \beta_1 \underline{U}_0 + \beta_2 \underline{U}_0 e^{2ika} - (\beta_1 + \beta_2) \underline{U}_1 \end{cases}$$

En réorganisant ces deux équations on obtient,

$$\begin{cases} \omega^2 \underline{U}_0 = (\omega_1 + \omega_2) \underline{U}_0 - (\omega_1 + \omega_2 e^{-2ika}) \underline{U}_1 \\ \omega^2 \underline{U}_1 = -(\omega_1 + \omega_2 e^{2ika}) \underline{U}_0 + (\omega_1 + \omega_2) \underline{U}_1 \end{cases}$$

On peut donc écrire le système sous la forme matricielle,

$$\omega^2 \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix} = D(k) \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad D(k) = \begin{pmatrix} \omega_1^2 + \omega_2^2 & -(\omega_1^2 + \omega_2^2 e^{-2ika}) \\ -(\omega_1^2 + \omega_2^2 e^{2ika}) & \omega_1^2 + \omega_2^2 \end{pmatrix}$$

10. On cherche à déterminer la relation de dispersion en cherchant les solutions non nulles du problème aux valeurs propres,

$$\omega^2 \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix} = D(k) \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres  $\omega^2$  sont les racines du polynôme caractéristique,

$$\chi(\omega^2) = \det(D(k) - \omega^2 I_2) = \begin{vmatrix} \omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega^2 & -(\omega_1^2 + \omega_2^2 e^{-2ika}) \\ -(\omega_1^2 + \omega_2^2 e^{2ika}) & \omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Soit en développant,

$$(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega^2)^2 - \omega_1^4 + \omega_2^4 + \omega_1^2 \omega_2^2 (e^{2ika} + e^{-2ika}) = 0$$

En utilisant  $e^{2ika} + e^{-2ika} = 2 \cos(2ka)$  on obtient,

$$(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega^2)^2 = \omega_1^4 + \omega_2^4 + 2\omega_1^2 \omega_2^2 \cos(2ka)$$

Puis en prenant la racine carrée des deux côtés et en isolant  $\omega^2$ , on obtient bien la relation de dispersion attendu par l'énoncé,

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{\omega_1^4 + \omega_2^4 + 2\omega_1^2 \omega_2^2 \cos(2ka)}$$

11. On considère la relation de dispersion obtenue précédemment,

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{\omega_1^4 + \omega_2^4 + 2\omega_1^2 \omega_2^2 \cos(2ka)}$$

On remarque que cette expression est symétrique en  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . En effet, échanger  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ne modifie ni le terme  $\omega_1^2 + \omega_2^2$ , ni le terme sous la racine. Les deux situations conduisent ainsi aux mêmes bandes de dispersion. En revanche, elles correspondent à deux configurations physiques différentes, obtenues en échangeant les rôles des ressorts  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Il s'agit donc de deux dimérisations opposées du réseau.

12. On étudie la périodicité de la nouvelle relation de dispersion obtenue, afin de déterminer la première zone de Brillouin dans le cas d'une chaîne dimérisée. On remarque que,

$$\cos\left(2\left(k + \frac{\pi}{a}\right)a\right) = \cos(2ka + 2\pi) = \cos(2ka)$$

On a donc,

$$\omega^2\left(k + \frac{\pi}{a}\right) = \omega^2(k)$$

Ainsi,  $\omega^2(k)$  est une fonction périodique de période  $\pi/a$ . On choisit donc l'intervalle de longueur  $\pi/a$  centré sur l'origine comme première zone de Brillouin,

$$-\frac{\pi}{2a} \leq k \leq \frac{\pi}{2a}$$

La zone de Brillouin pour la chaîne dimérisée est deux fois plus petite que celle de la chaîne monoatomique, ce qui est dû au doublement de la maille élémentaire.

13.1. En prenant  $k = 0$ , on a  $\cos(2ka) = 1$ . La relation de dispersion devient donc,

$$\omega^2(0) = \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{\omega_1^4 + \omega_2^4 + 2\omega_1^2\omega_2^2} = \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm (\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

On obtient ainsi les deux solutions,

$$\boxed{\omega_-(0) = 0 \quad \text{et} \quad \omega_+(0) = \sqrt{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}}$$

13.2. Aux bords de la première zone de Brillouin on a,

$$k = \pm \frac{\pi}{2a} \quad \longrightarrow \quad \cos(2ka) = \cos(\pm\pi) = -1$$

La relation de dispersion devient alors,

$$\omega^2\left(\pm \frac{\pi}{2a}\right) = \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{\omega_1^4 + \omega_2^4 - 2\omega_1^2\omega_2^2} = \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm |\omega_1^2 - \omega_2^2|$$

On obtient donc les deux pulsations en bord de zone,

$$\boxed{\omega_-^2\left(\pm \frac{\pi}{2a}\right) = 2 \min(\omega_1^2, \omega_2^2) \quad \text{et} \quad \omega_+^2\left(\pm \frac{\pi}{2a}\right) = 2 \max(\omega_1^2, \omega_2^2)}$$

13.3 On cherche le développement limité de  $\omega^2$  au voisinage de  $k = 0$  pour la branche basse de la relation de dispersion,

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{\omega_1^4 + \omega_2^4 + 2\omega_1^2\omega_2^2 \cos(2ka)}$$

Au voisinage de  $k = 0$ , le développement du cosinus donne,

$$\cos(2ka) = 1 - 2(ka)^2 + o(k^2)$$

Injectons ceci dans le terme sous la racine,

$$\omega_1^4 + \omega_2^4 + 2\omega_1^2\omega_2^2 \cos(2ka) = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2 a^2 k^2 + o(k^2)$$

On factorise par  $(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2$  et on développe la racine carrée,

$$\sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 \left(1 - \frac{4\omega_1^2\omega_2^2 a^2 k^2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2} + o(k^2)\right)} = (\omega_1^2 + \omega_2^2) \sqrt{1 - \varepsilon}, \quad \text{où} \quad \varepsilon = \frac{4\omega_1^2\omega_2^2 a^2 k^2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2} + o(k^2)$$

Utilisant  $\sqrt{1 - \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + o(\varepsilon)$  on obtient,

$$\sqrt{\dots} = (\omega_1^2 + \omega_2^2) \left(1 - \frac{2\omega_1^2\omega_2^2 a^2 k^2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2} + o(k^2)\right) = \omega_1^2 + \omega_2^2 - \frac{2\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} a^2 k^2 + o(k^2)$$

Pour les basses fréquences, soit la solution  $(-)$  on a donc,

$$\omega_-^2(k) = \frac{2\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} a^2 k^2 + o(k^2) \quad \longrightarrow \quad \omega_-(k) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} a |k| \sqrt{\frac{2\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$$

La vitesse de groupe  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$  (pour  $k > 0$ ) est donc,

$$v_g = a \sqrt{\frac{2\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$$