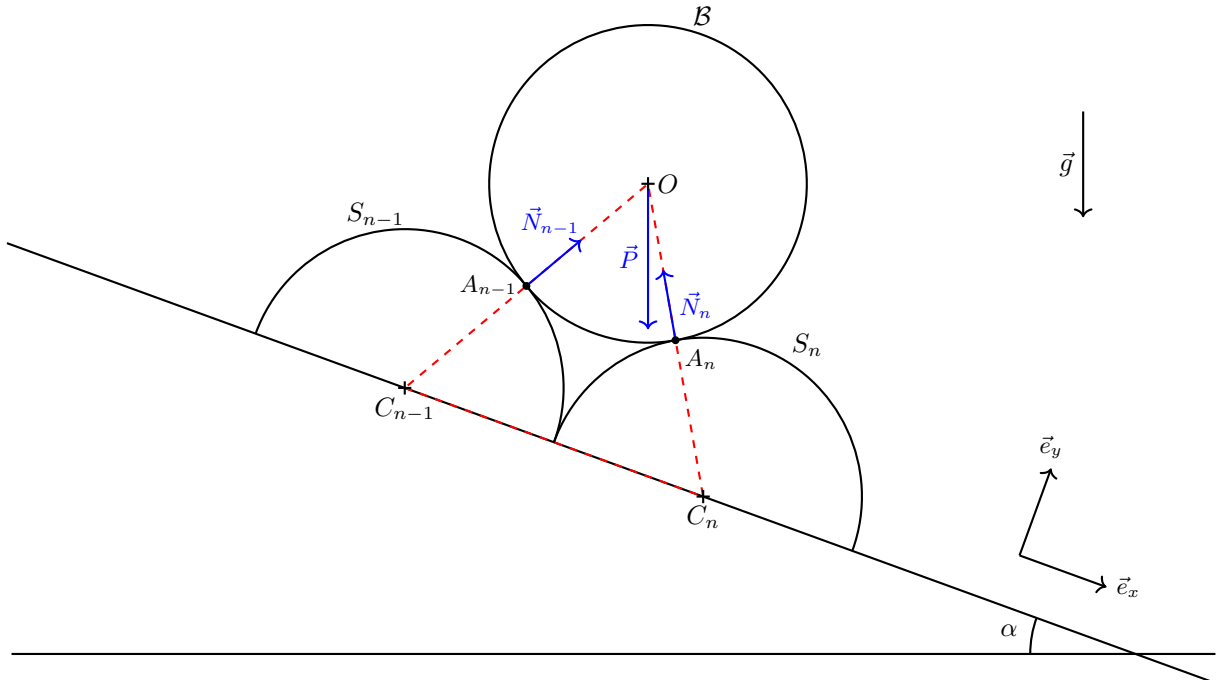


Phénomènes d'hystérésis en physique

Première partie : Transition de phase solide-liquide dans les milieux granulaires

Preliminaires

1. Représentons sur un schéma les différentes forces s'exerçant sur le grain \mathcal{B} ,



- Le grain \mathcal{B} est soumis à trois forces : son poids \vec{P} appliqué en O , ainsi que les forces de contact normales \vec{N}_{n-1} et \vec{N}_n appliquées aux points de contact A_{n-1} et A_n . Les trois grains étant de même rayon on a donc $OC_{n-1} = OC_n = C_{n-1}C_n$. Ainsi, le triangle $C_{n-1}OC_n$ est **équilatéral**.
- À l'équilibre, la première loi de Newton donne,

$$\vec{N}_{n-1} + \vec{N}_n + \vec{P} = \vec{0}$$

En projetant dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) on obtient,

$$\text{selon } \vec{e}_x : \frac{\sqrt{3}}{2}N_{n-1} - \frac{\sqrt{3}}{2}N_n + mg \sin \alpha = 0$$

$$\text{selon } \vec{e}_y : \frac{1}{2}N_{n-1} + \frac{1}{2}N_n - mg \cos \alpha = 0$$

Soit, en réarrangeant les termes des deux équations on obtient,

$$N_{n-1} - N_n = -\frac{2mg}{\sqrt{3}} \sin \alpha \quad (1)$$

$$N_{n-1} + N_n = 2mg \cos \alpha \quad (2)$$

2. D'après les relations précédentes, on obtient par somme et différence,

$$(2) + (1) : N_{n-1} = mg \cos \alpha - \frac{mg}{\sqrt{3}} \sin \alpha$$

$$(2) - (1) : N_n = mg \cos \alpha + \frac{mg}{\sqrt{3}} \sin \alpha$$

En utilisant la relation trigonométrique : $\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$ on obtient,

$$mg \cos \alpha \pm \frac{mg}{\sqrt{3}} \sin \alpha = \frac{2mg}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \pm \frac{1}{2} \sin \alpha \right)$$

Ainsi on a,

$$N_{n-1} = \frac{2mg}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \quad \text{et} \quad N_n = \frac{2mg}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$$

Ainsi, les forces de contact se mettent bien sous la forme,

$$N_{n-1} = k \sin \Psi_{n-1} \quad \text{et} \quad N_n = k \sin \Psi_n \quad \text{avec} \quad k = \frac{2mg}{\sqrt{3}}, \quad \Psi_{n-1} = \frac{\pi}{3} - \alpha, \quad \Psi_n = \frac{\pi}{3} + \alpha$$

3. Le contact avec S_{n-1} est maintenu tant que,

$$N_{n-1} > 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{2mg}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) > 0 \quad \longrightarrow \quad \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) > 0 \quad \longrightarrow \quad \alpha < \frac{\pi}{3}.$$

Le contact est donc rompu pour l'angle critique,

$$c_s = \frac{\pi}{3}$$

1. Dynamique d'un grain entre les collisions

4. Dans le repère lié à la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) d'origine C_n , la position $\vec{r} = y\vec{e}_y + x\vec{e}_x$ du centre O du grain \mathcal{B} peut s'écrire,

$$\vec{r} = d (\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y)$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient la vitesse du grain \mathcal{B} ,

$$\vec{v} = d \dot{\phi} (\cos \phi \vec{e}_x - \sin \phi \vec{e}_y)$$

La norme de la vitesse vérifie alors,

$$v^2 = d^2 \dot{\phi}^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = d^2 \dot{\phi}^2$$

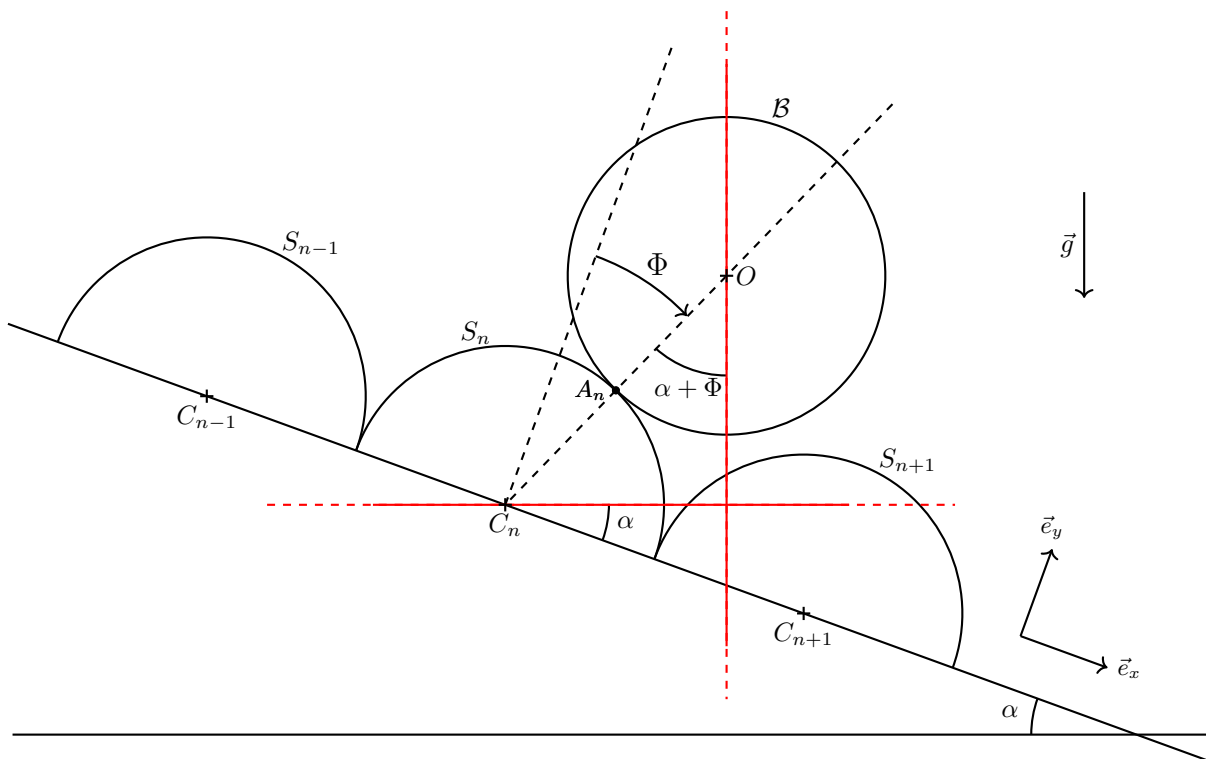
Ainsi, l'énergie cinétique du grain s'écrit,

$$E_c = \frac{1}{2} m d^2 \dot{\phi}^2$$

5. L'énergie potentielle de pesanteur d'un point matériel de masse m placé dans un champ de pesanteur uniforme s'écrit, à une constante additive près,

$$E_p(z) = mgz$$

6. Représentons sur un schéma le problème étudié,



L'altitude de O par rapport à C_n est la projection de $\overrightarrow{C_n O}$ sur la verticale. Or l'angle entre $\overrightarrow{C_n O}$ et la verticale vaut $\phi + \alpha$ donc,

$$z_O - z_{C_n} = d \cos(\phi + \alpha)$$

On choisit l'énergie potentielle nulle lorsque \mathcal{B} est au sommet de la bosse S_n . Dans cette position, on a $\phi = 0$ donc,

$$z_{O,\max} - z_{C_n} = d \cos \alpha$$

Ainsi l'énergie potentielle s'écrit,

$$E_p = mg(z_O - z_{O,\max}) = mgd [\cos(\phi + \alpha) - \cos \alpha]$$

Donc,

$$E_p = mgd [\cos(\phi + \alpha) - \cos \alpha]$$

7. Tant que le grain \mathcal{B} reste uniquement en contact avec S_n , les forces extérieures appliquées sont son poids et la réaction de contact de S_n . Le poids dérive d'une énergie potentielle de pesanteur c'est donc une force conservative. La réaction normale de contact ne travaille pas, car elle est normale à la trajectoire admissible du grain au point de contact. De plus, les forces intérieures au solide \mathcal{B} ne modifient pas son énergie mécanique totale. Ainsi, tant qu'il n'y a contact ni avec S_{n-1} ni avec S_{n+1} , l'énergie mécanique de \mathcal{B} est conservée,

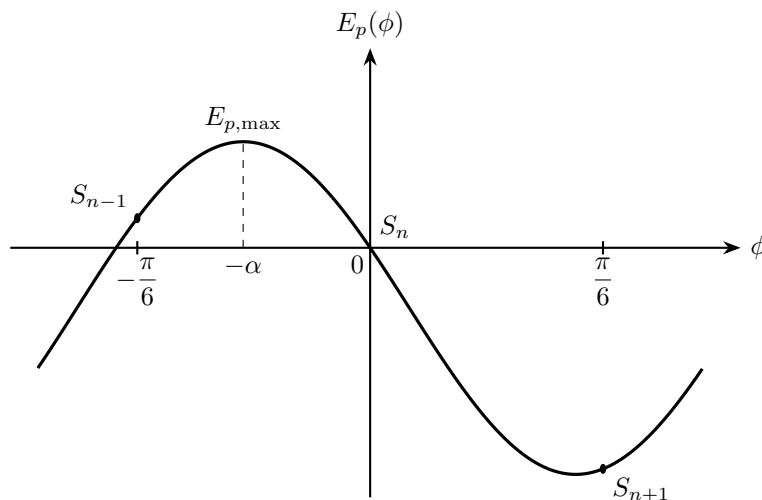
$$E_m = E_c + E_p = \text{constante}$$

Avec le résultat de la question précédente,

$$E_m = E_c + mgd [\cos(\phi + \alpha) - \cos \alpha] = \text{constante}$$

En revanche, si \mathcal{B} entre en contact avec S_{n-1} ou S_{n+1} , l'analyse précédente n'est plus valable pendant le choc. Il apparaît alors une nouvelle réaction de contact, éventuellement impulsionnelle, et la trajectoire n'est plus décrite seulement par le mouvement au contact de S_n .

8. Traçons l'allure du graphe de $E_p(\phi)$,



La fonction $E_p(\phi)$ a donc l'allure d'un cosinus décalé. Les trois angles remarquables sont,

$$\phi_{S_{n-1}} = -\frac{\pi}{6}, \quad \phi_{S_n} = 0, \quad \phi_{S_{n+1}} = \frac{\pi}{6}$$

Le maximum de l'énergie potentielle est atteint lorsque,

$$\phi + \alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad \phi = -\alpha$$

Graphiquement, les trajectoires possibles sont les domaines de valeurs de ϕ pour lesquels $E_m \geq E_p(\phi)$. Si l'énergie mécanique initiale est inférieure au maximum de E_p , le grain reste piégé dans un puits de potentiel et ne peut pas passer de S_{n-1} à S_{n+1} . Il oscille alors entre deux positions extrêmes. Si, au contraire, $E_m \geq E_{p,\max}$, alors le grain peut franchir la barrière de potentiel et atteindre S_{n+1} . Or on a,

$$E_{p,\max} = E_p(-\alpha) = mgd [1 - \cos \alpha]$$

Ainsi, la condition pour que \mathcal{B} puisse entrer en contact avec S_{n+1} est,

$$E_m \geq mgd [1 - \cos \alpha]$$

9. On suppose initialement que le grain \mathcal{B} situé en $\phi = -\pi/6$ quitte S_{n-1} avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\phi}_0$. Tant que le grain reste uniquement en contact avec S_n , son énergie mécanique est conservée. Pour que le grain atteigne S_{n+1} , il doit franchir le maximum de l'énergie potentielle situé en $\phi = -\alpha$. Or d'après la question précédente on a vu que la condition de passage est,

$$E_m \geq E_{p,\max}$$

Soit en remplaçant,

$$\frac{1}{2}md^2\dot{\phi}_0^2 + mgd \left[\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\alpha \right] \geq mgd[1 - \cos\alpha] \quad \longrightarrow \quad \dot{\phi}_0^2 \geq \frac{2g}{d} \left[1 - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

Ainsi, le grain \mathcal{B} atteint S_{n+1} si et seulement si,

$$\dot{\phi}_0 \geq \dot{\phi}_c \quad \text{avec} \quad \dot{\phi}_c = \sqrt{\frac{2g}{d} \left(1 - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \right)}$$

10. On suppose que $\dot{\phi}_0 > \dot{\phi}_c$. Le grain \mathcal{B} franchit donc la barrière de potentiel et reste en mouvement entre le moment où il quitte S_{n-1} et celui où il entre en contact avec S_{n+1} , l'énergie mécanique est conservée,

$$\frac{1}{2}md^2\dot{\phi}^2 + mgd [\cos(\phi + \alpha) - \cos\alpha] = \frac{1}{2}md^2\dot{\phi}_0^2 + mgd \left[\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\alpha \right]$$

On simplifie, on isole $\dot{\phi}^2$ puis on introduit $\dot{\phi}_c$,

$$\dot{\phi}^2 = \dot{\phi}_0^2 + \frac{2g}{d} \left[\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \cos(\phi + \alpha) \right] = \dot{\phi}_0^2 - \dot{\phi}_c^2 + \frac{2g}{d} [1 - \cos(\phi + \alpha)]$$

Ainsi on obtient,

$$\dot{\phi} = \sqrt{\dot{\phi}_0^2 - \dot{\phi}_c^2 + \frac{2g}{d} [1 - \cos(\phi + \alpha)]}$$

Au moment où \mathcal{B} entre en contact avec S_{n+1} , on se situe en $\phi = \pi/6$. On a donc,

$$\dot{\phi}_f^2 = \dot{\phi}_0^2 + \frac{2g}{d} \left[\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \right] = \dot{\phi}_0^2 + \frac{2g}{d} \sin\alpha$$

Finalement on a bien,

$$\dot{\phi}_f = \sqrt{\dot{\phi}_0^2 + \frac{2g}{d} \sin\alpha}$$

11. Pour analyser le comportement au voisinage du sommet de S_n , repérons l'écart angulaire par rapport à cette position d'altitude maximale. On atteint le sommet de S_n lorsque $\phi + \alpha = 0$ posons donc,

$$\begin{cases} \delta\phi = \phi + \alpha = 0 \\ \dot{\delta\phi} = \dot{\phi} \end{cases}$$

D'après la question 10, on a,

$$\dot{\phi}^2 = \dot{\phi}_0^2 - \dot{\phi}_c^2 + \frac{2g}{d} [1 - \cos(\phi + \alpha)] \quad \longrightarrow \quad \dot{\delta\phi}^2 = \dot{\phi}_0^2 - \dot{\phi}_c^2 + \frac{2g}{d} [1 - \cos(\delta\phi)]$$

Dans la limite $\delta\phi \ll 1$, on utilise le développement limité du cosinus à l'ordre 2,

$$\cos(\delta\phi) \simeq 1 - \frac{\delta\phi^2}{2} \quad \longrightarrow \quad \dot{\delta\phi}^2 = \dot{\phi}_0^2 - \dot{\phi}_c^2 + \frac{g}{d}\delta\phi^2$$

Qui peut se réécrire sous la forme suivante,

$$\tau^2 \dot{\delta\phi}^2 = \delta\phi^2 + \varepsilon \quad \text{avec} \quad \tau = \sqrt{\frac{d}{g}} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{d}{g} (\dot{\phi}_0^2 - \dot{\phi}_c^2)$$

Comme $\dot{\phi}_0 > \dot{\phi}_c$, on a $\varepsilon > 0$.

12. On résout l'équation du mouvement précédemment trouvée par séparation des variables. On choisit la racine positive après le passage au sommet, ce qui donne,

$$\int_0^{\delta\phi} \frac{d(\delta\phi)}{\sqrt{\delta\phi^2 + \varepsilon}} = \int_0^t \frac{dt}{\tau} \quad \rightarrow \quad \operatorname{argsh} \left(\frac{\delta\phi}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = \frac{t}{\tau}$$

On en déduit finalement,

$$\boxed{\delta\phi(t) = \sqrt{\varepsilon} \sinh \left(\frac{t}{\tau} \right)}$$

13. Au départ, le grain quitte S_{n-1} à la position angulaire $\phi = -\pi/6$ et touche le grain S_{n+1} à la position angulaire $\phi = \pi/6$. Or comme $\delta\phi = \phi + \alpha$ on a donc,

$$\delta\phi_i = \alpha - \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad \delta\phi_f = \alpha + \frac{\pi}{6}$$

On a d'après la question précédente,

$$t = \tau \operatorname{argsh} \left(\frac{\delta\phi}{\sqrt{\varepsilon}} \right)$$

Le temps total de parcours vaut,

$$T = t_f - t_i \quad \rightarrow \quad T = \tau \left[\operatorname{argsh} \left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{6}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) - \operatorname{argsh} \left(\frac{\alpha - \frac{\pi}{6}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \right]$$

Comme la fonction argsh est impaire on obtient,

$$\boxed{T = \tau \left[\operatorname{argsh} \left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{6}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) + \operatorname{argsh} \left(\frac{\frac{\pi}{6} - \alpha}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \right]}$$

14. Dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, les arguments des fonctions argsh deviennent grands. On utilise alors,

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \simeq \ln(2x) \quad \text{pour } x \gg 1$$

Ainsi,

$$T \simeq \tau \left[\ln \left(\frac{2 \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right)}{\sqrt{\varepsilon}} \right) + \ln \left(\frac{2 \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right)}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \right] = \tau \ln \left(\frac{4 \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right)}{\varepsilon} \right)$$

Finalement on a,

$$\boxed{T \simeq \tau \ln \left(\frac{4 \left[(\pi/6)^2 - \alpha^2 \right]}{\varepsilon} \right)}$$

15. Le centre de \mathcal{B} décrit un arc de cercle de rayon d autour de C_n . Entre les deux points de contact, l'angle balayé vaut $\pi/3$. La distance entre les points de départ et d'arrivée est donc la longueur de la corde,

$$\ell = 2d \sin \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \right) = 2d \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = d$$

La vitesse moyenne vaut alors,

$$u_m = \frac{\ell}{T} = \frac{d}{T}$$

En utilisant l'expression asymptotique de T obtenue à la question précédente et $\tau = \sqrt{d/g}$, on trouve,

$$u_m = \frac{d}{\sqrt{\frac{d}{g}} \ln \left(\frac{4[(\pi/6)^2 - \alpha^2]}{\varepsilon} \right)}$$

Donc,

$$u_m = \frac{\sqrt{gd}}{\ln \left(\frac{4[(\pi/6)^2 - \alpha^2]}{\varepsilon} \right)}$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, le logarithme tend vers $+\infty$, donc,

$$u_m \rightarrow 0$$

Physiquement, lorsque ε tend vers zéro, la vitesse initiale devient très proche de la vitesse critique. Le grain passe alors un temps de plus en plus long au voisinage du sommet de S_n , ce qui rend sa vitesse moyenne arbitrairement faible.

2. Etude de la phase liquide stationnaire