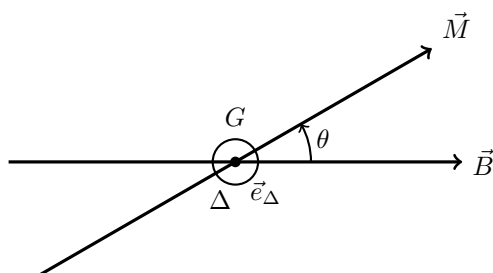


Petites oscillations de l'aiguille d'une boussole



1. a. On va utiliser le Théorème du moment cinétique scalaire appliqué au moment magnétique,

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta} \quad \text{avec} \quad L_{\Delta} = J\omega = J\dot{\theta}$$

On sait que,

$$\mathcal{M}_{\Delta} = (\vec{M} \times \vec{B}) \cdot \vec{e}_{\Delta} = MB \sin \underbrace{(\widehat{\vec{M}, \vec{B}})}_{=-\theta} \underbrace{\vec{e}_{\Delta} \cdot \vec{e}_{\Delta}}_{=1} = -MB \sin \theta$$

Ainsi on obtient,

$$J\ddot{\theta} = -MB \sin \theta$$

Que l'on met de la forme d'une équation différentielle vérifiée par θ ,

$$\ddot{\theta} + \frac{MB}{J} \sin \theta = 0$$

Comme on est dans le cas des petites oscillations on a,

$$|\theta| \ll 1 \quad \text{et donc} \quad \sin \theta \sim \theta$$

On peut donc mettre sous la forme d'un oscillateur harmonique,

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{MB}{J}}$$

On a donc accès à la période propre, avec $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MB}}$$

- b. Déterminons maintenant $\theta(t)$, on sait que les solutions générale pour un oscillateur harmonique sont de la forme,

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

En dérivant l'équation par rapport au temps on obtient,

$$\dot{\theta}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t)$$

Or on a les conditions initiales suivantes,

$$\begin{cases} \theta(t=0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = \Omega \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{\Omega}{\omega_0} \end{cases}$$

Soit finalement,

$$\boxed{\theta(t) = \frac{\Omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

2. Décrivons maintenant les deux situations.

- Dans cette première situation on a les deux champs magnétiques qui ont le même sens et sont parallèles donc,

$$B_{\text{tot}} = B' + B \longrightarrow T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M(B' + B)}}$$

- Dans cette deuxième situation on a les deux champs magnétiques qui sont de sens contraire et sont parallèles donc,

$$B_{\text{tot}} = B' - B \longrightarrow T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M(B' - B)}}$$

- En élevant au carré les périodes et en divisant T_1 par T_2 on a,

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{B' - B}{B' + B} \longrightarrow B' - B = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 (B' + B) \longrightarrow B \left(1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\right) = B' \left(1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\right)$$

Soit,

$$\boxed{B = B' \left(\frac{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} \right)}$$