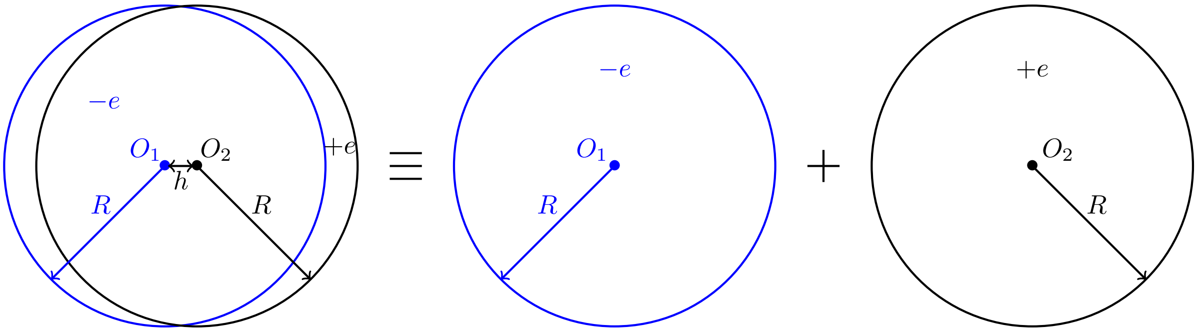
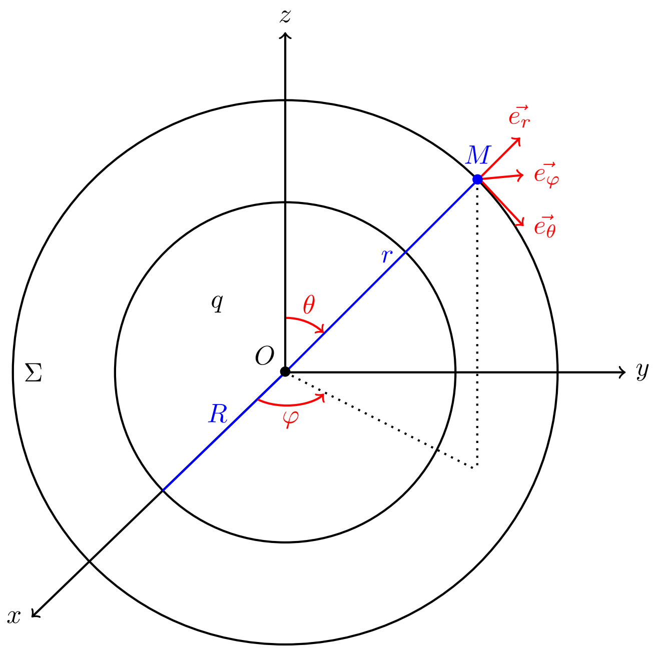
Champ produit par deux boules chargées

Schéma du problème physique



Nous allons donc utilisé le principe de superposition pour résoudre ce problème : $\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{E_1}(M) + \overrightarrow{E_2}(M)$

Champs électrostatique pour une Sphère chargé uniformément en volume et portant la charge q



Étude des symétries :
Les plans $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ et $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\varphi})$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges passant par M. Donc $\overrightarrow{E}(M)$ appartient à leur intersection, ainsi $\overrightarrow{E}(M) = E_r(r, \theta, \varphi)\vec{e_r}$.

Étude des invariances :
Comme la sphère est chargé uniformément en volume, il y a invariance de la distribution de charges par rotations d'angles θ et φ. Donc, E_r est indépendant de θ et φ.

Finalement : $\overrightarrow{E}(M) = E_r(r)\vec{e_r}$.

- **Choix d'une surface de Gauss fermée :** Σ = La sphère de centre O, de rayon r passant par M
- **Calcul du flux de $\vec{E}$ sortant de Σ :** $\Phi_E = \oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint_\Sigma E_r(r)\vec{e_r} \cdot dS\vec{e_r} = E_r(r)S = 4\pi r^2 E_r(r)$
- **D'après le Théorème de Gauss :** $\Phi_E = \dfrac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

- **Disjonction de cas** :
  - Premier cas : $r > R$

    On a, $q_{\text{int}} = q$ donc, $4\pi r^2 E_r(r) = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E_r(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
  - Deuxième cas : $r < R$

    On a, q_{int} est une fraction de q, donc comme $q = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho$ et $q_{\text{int}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho$

    On obtient, $q_{\text{int}} = q\dfrac{r^3}{R^3}$ donc, $4\pi r^2 E_r(r) = \dfrac{qr^3}{\varepsilon_0 R^3} \Longrightarrow E_r(r) = \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$

- **Finalement, en utilisant un système de coordonnée intrinsèque :**
  - Pour la boule 1 : $\boxed{\overrightarrow{E_1}(M) = \begin{cases} \dfrac{-e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot O_1M^3}\overrightarrow{O_1M} & \text{si } O_1M > R \\ \dfrac{-e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R^3}\overrightarrow{O_1M} & \text{si } O_1M < R \end{cases}}$
  - Pour la boule 2 : $\boxed{\overrightarrow{E_2}(M) = \begin{cases} \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot O_2M^3}\overrightarrow{O_2M} & \text{si } O_2M > R \\ \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R^3}\overrightarrow{O_2M} & \text{si } O_2M < R \end{cases}}$

* **Pour le champ présent dans le volume** $(\textbf{Sphère}_1 \cap \textbf{Sphère}_2)$ **:**

On applique le principe de superposition :

$$\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{E_1}(M) + \overrightarrow{E_2}(M) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R^3}\left(\overrightarrow{O_2M} - \overrightarrow{O_1M}\right) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R^3}\left(\overrightarrow{O_2M} + \overrightarrow{MO_1}\right) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R^3}\overrightarrow{O_2O_1}$$

Ainsi on obtient,

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R^3}\overrightarrow{O_2O_1} \quad \text{si} \quad M \in (\text{Sphère}_1 \cap \text{Sphère}_2)}$$

* **Pour le champ présent à l'extérieur de** $(\textbf{Sphère}_1 \cup \textbf{Sphère}_2)$ **:**

On a d'après l'énocé, $O_1O_2 \ll R$ cette hypothèse nous permet de se placer dans le cas du dipôle électrostatique avec l'approximation dipolaire.

On a le moment dipolaire qui s'écrit,

$$\vec{p} = e\overrightarrow{O_2O_1}$$

De plus, le potentiel électrostatique s'écrit,

$$V(M) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}$$

Ainsi avec la relation champ-potentiel,

$$\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V(M))$$

On obtient finalement,

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3}\left(2\cos\theta\vec{e_r} + \sin\theta\vec{e_\theta}\right) \quad \text{si} \quad M \in (\text{Sphère}_1 \cup \text{Sphère}_2)}$$

* **Pour le champ présent à l'intérieur de $(\textbf{Sphère}_1 \triangle \textbf{Sphère}_2)$:**