

Effet Meissner - supraconducteur (X-ENS 2011)

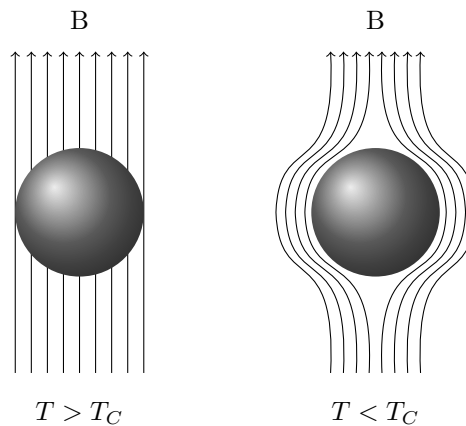
Pour s'affranchir de l'effet Joule, on utilise pour les bobinages des matériaux *supraconducteurs*, qui ont la propriété de pouvoir transporter un courant sans dissipation au-dessous d'une température critique T_c .

1. On adopte un modèle microscopique de supraconducteur dans lequel les électrons de conduction (de charge $-e$ et de masse m_e), initialement au repos, sont mis en mouvement sous l'action d'un champ électrique \vec{E} , supposé uniforme et constant. Écrire l'équation du mouvement d'un électron.
2. On note n la densité volumique d'électrons, supposée uniforme. Dédire de la question précédente une relation simple entre $\partial \vec{j} / \partial t$ et \vec{E} .
3. On suppose que la relation obtenue à la question 2 reste valable même si le champ n'est ni uniforme ni constant, et on se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires. En utilisant les équations de Maxwell, montrer que le champ magnétique vérifie l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \right) = \vec{0} \quad (1)$$

où λ est une longueur dont on donnera l'expression.

4. Calculer λ pour une densité d'électrons de conduction $n = 10^{28} \text{ m}^{-3}$.
5. Lorsqu'on plonge un supraconducteur dans un champ magnétique extérieur, il expulse ce champ. Cette propriété, qui porte le nom d'effet Meissner, est représentée sur la figure ci-dessous.



Effet Meissner dans une boule supraconductrice placée dans un champ magnétique lorsqu'elle est refroidie sous la température critique T_c . Les lignes sont les lignes de champ.

Pour expliquer l'effet Meissner, on postule une relation plus forte que l'équation (1) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = \vec{0} \quad (2)$$

On considère un supraconducteur occupant le demi-espace $x > 0$ dans un système de coordonnées cartésiennes de repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On suppose que le champ à l'extérieur du supraconducteur ($x < 0$) est uniforme et vaut $B_0 \vec{e}_z$, et on admet que \vec{B} ne dépend que de x . On admettra que \vec{B} est continu en $x = 0$. Calculer le champ magnétique pour $x > 0$ en fonction de B_0 , x et λ . En quoi ce modèle explique-t-il l'effet Meissner ?

6. Déterminer la densité de courant $\vec{j}(x)$ à l'intérieur du supraconducteur.

Données : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B}$