Effet Meissner - Supraconducteur (X-ENS 2011)

1. On applique le principe fondamental de la dynamique à un électron, qui n'est soumis qu'à la force $q\vec{E}$ avec $q = -e$ sa charge.

   On obtient l'équation du mouvement de l'électron,

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}}$$

2. En utilisant la relation $\vec{j} = -ne\vec{v}$ et en la remplaçant dans l'équation du mouvement de l'électron,

   On obtient,

$$\boxed{\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e}\vec{E}} \tag{1}$$

3. En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère avec $\vec{E}$ supposé uniforme et constant,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

   En composant par le rotationnel,

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) = \mu_0\overrightarrow{\text{rot}}\vec{j}$$

   Puis on dérive par rapport à la variable temporelle t,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B})\right) = \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{j}$$

   En utilisant le théorème de Schwarz,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B})\right) = \mu_0\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right)$$

   Puis en injectant l'équation (1),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B})\right) = \mu_0\frac{ne^2}{m_e}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}$$

   En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

   Donc,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B})\right) = -\mu_0\frac{ne^2}{m_e}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

   On obtient finalement,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) + \frac{1}{\lambda^2}\vec{B}\right) = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \lambda = \sqrt{\frac{m_e}{\mu_0 ne^2}}}$$

4. Application numérique : $\lambda \approx 5,23 \times 10^{-8}\,\mathrm{m}$

5. On utilise l'identité vectorielle donnée par l'énoncé,

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B} + \frac{1}{\lambda^2}\vec{B} = \vec{0}$$

Or, d'après l'équation de Maxwell-Flux,

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

Donc,

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{\lambda^2}\vec{B} = \vec{0}$$

Finalement, projeté selon Oz, on obtient,

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \frac{1}{\lambda^2}B_z = 0$$

La solution générale est de la forme,

$$\forall x > 0, \quad B_z(x) = \mu e^{-x/\lambda} + \gamma e^{x/\lambda}$$

Cependant, comme le champ magnétique $\vec{B}$ ne peut diverger, on a $\gamma = 0$, donc,

$$B_z(x) = \mu e^{-x/\lambda}$$

Avec la condition de continuité de $\vec{B}$ en $x = 0$,

$$B_z(x = 0) = B_0 = \mu$$

Finalement,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \vec{B} = B_0 e^{-x/\lambda}\vec{e_z}}$$

Cela explique bien l'effet Meissner, car le champ magnétique décroît exponentiellement à l'intérieur du matériau jusqu'à s'annuler. Par conséquent, le champ magnétique contourne principalement l'objet.

6. En reprenant l'équation de Maxwell-Ampère pour $\vec{E}$ uniforme et constant,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

On obtient selon Oz,

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 j_z \quad \longrightarrow \quad j_z = \frac{B_0}{\mu_0\lambda}e^{-x/\lambda}$$

Finalement,

$$\boxed{\vec{j}(x) = \frac{B_0}{\mu_0\lambda}e^{-x/\lambda}\vec{e_z}}$$