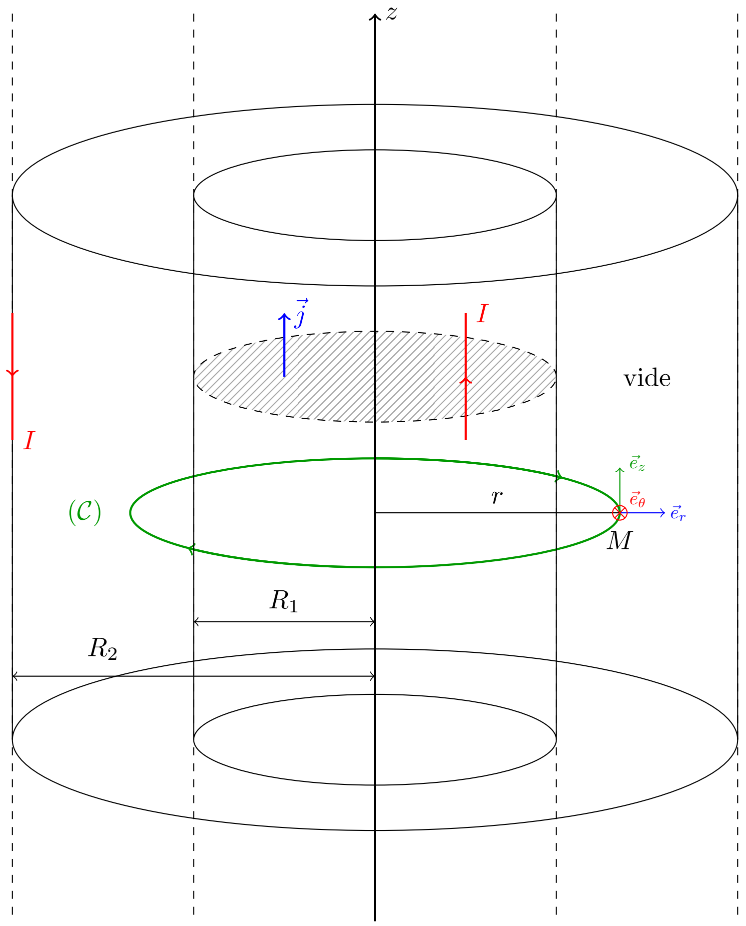
Inductance linéique d'un câble coaxial

On commence par faire un schéma du problème étudié :



1. Dans un premier temps on va étudier les invariances et symétries possibles de la distribution de courant $\mathscr{D}$.

- On a $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ un plan de symétrie de la distribution de courant $\mathscr{D}$ passant par M. On sait donc que le champ $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce même plan. Soit,

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta$$

- On a une invariance de la distribution de courant $\mathscr{D}$ par rotation d'angle θ et par translation selon Oz. On sait donc que le champ $\vec{B}(M)$ est indépendant de ces deux variables. Ainsi on a,

$$\boxed{\vec{B}(M) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta}$$

- Appliquons maintenant le théorème d'Ampère, pour cela on va définir un contour d'Ampère fermé. Soit,

$$(\mathcal{C}) = \text{cercle d'axe } Oz \text{ de rayon } r\text{, passant par } M\text{, orienté dans le sens des } \theta \text{ croissant}$$

- Calculons maintenant la circulation du champ magnétique le long de ce contour,

$$C_B = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} B_\theta(r)\, dl = B_\theta(r)\, 2\pi r$$

- Finalement, en utilisant le résultat du théorème d'Ampère on obtient,

$$C_B = \mu_0 I_{\text{enlacé}} \quad \longrightarrow \quad 2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

  Soit,

$$\boxed{B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I_{\text{enlacé}}}{2\pi r}}$$

- Maintenant on va faire une disjonction de cas pour déterminer $\vec{B}(M)$,

  - Le cas où $r > R_2$,

$$I_{\text{enlacé}} = I - I = 0$$

    Soit,

$$\boxed{B_\theta = 0}$$

  - Le cas où $R_1 < r < R_2$,

$$I_{\text{enlacé}} = I \quad \longrightarrow \quad 2\pi r B_\theta = \mu_0 I$$

    Soit,

$$\boxed{B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

  - Le cas où $r < R_1$, En utilisant le théorème de Stokes, soit $\mathcal{S}$ une surface ouverte s'appuyant sur le contour fermé $(\mathcal{C})$ de rayon r et orienté dans le sens des theta croissant, on a

$$\mu_0 I_{\text{enlacé}} = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

    Comme la densité volumique de courant est uniforme dans le câble coaxial de rayon R_1 et qu'il est parcouru d'un courant permanent on a,

$$\iint_{\mathcal{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \pi r^2 j$$

    Ainsi on obtient,

$$I_{\text{enlacé}} = \pi r^2 j$$

    Or,

$$I = \pi R_1^2 j$$

    En faisant le rapport des intensités,

$$I_{\text{enlacé}} = I \left(\frac{r}{R_1}\right)^2 \quad \longrightarrow \quad 2\pi r B_\theta = \mu_0 I \left(\frac{r}{R_1}\right)^2$$

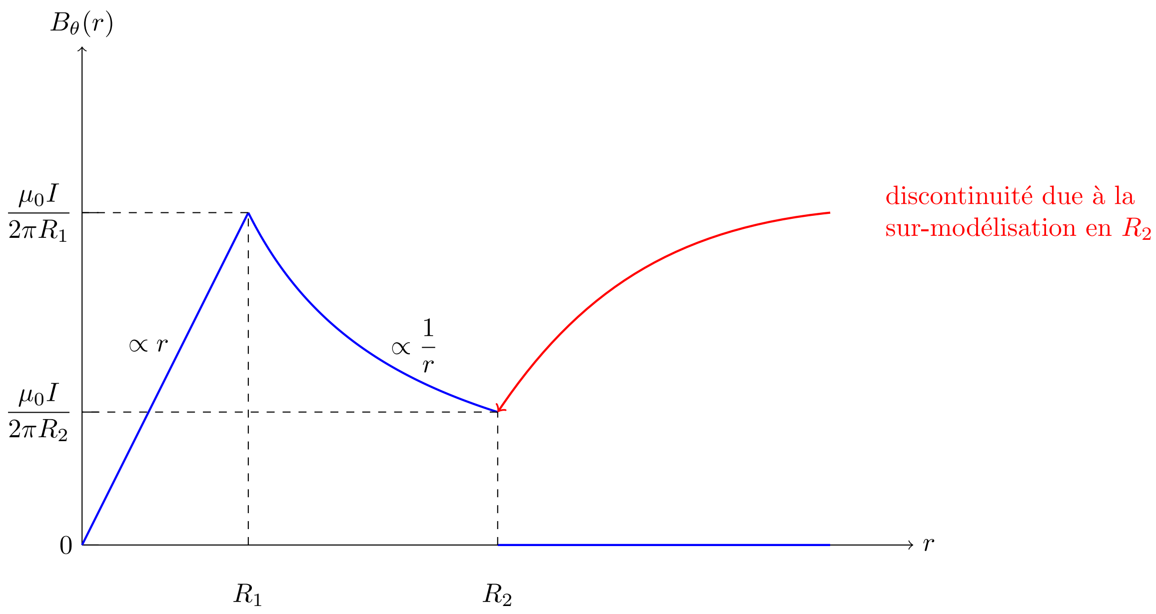
    Soit,

$$\boxed{B_\theta = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}}$$

– Ainsi, le champ magnétique dans tout l'espace s'écrit :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r\vec{e}_\theta & \text{si} \quad r < R_1, \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta & \text{si} \quad R_1 < r < R_2 \\ \vec{0} & \text{si} \quad r > R_2 \end{cases}}$$

- Traçons maintenant l'allure de $B_\theta(r)$,



2. L'expression de la densité volumique d'énergie magnétique associée à un champ magnétique $\vec{B}$ est,

$$\boxed{u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \text{et s'exprime en } J \cdot m^{-3}}$$

3. L'expression permettant de calculer l'énergie du champ créé par une longueur H de câble coaxial est,

$$U_m = \iiint_\Omega u_m d\tau \quad \text{avec} \quad d\tau = r dr d\theta dz$$

Passons maintenant au calcul,

$$U_m = \iiint_\Omega u_m d\tau = \iiint_{r<R_1} u_m d\tau + \iiint_{R_1<r<R_2} u_m d\tau$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2}\left(\frac{1}{R_1^4}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \int_0^{R_1} r^3 dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}\right) = \frac{\mu_0 I^2 H}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2 H}{4\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Soit,

$$\boxed{U_m = \frac{\mu_0 I^2 H}{16\pi}\left(1 + 4\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)}$$

4. Pour une bobine on peut écrire,

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2$$

Ce qui nous donne pour L grâce à la formule précédemment trouvée,

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 H}{8\pi}\left(1 + 4\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)}$$

On peut en déduire ensuite avec $\Lambda = \dfrac{L}{H}$,

$$\boxed{\Lambda = \frac{\mu_0}{8\pi}\left(1 + 4\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right)}$$

L'application numérique nous donne,

$$\boxed{\Lambda = 0,23\ \mu\mathrm{H}\cdot\mathrm{m}^{-1}}$$