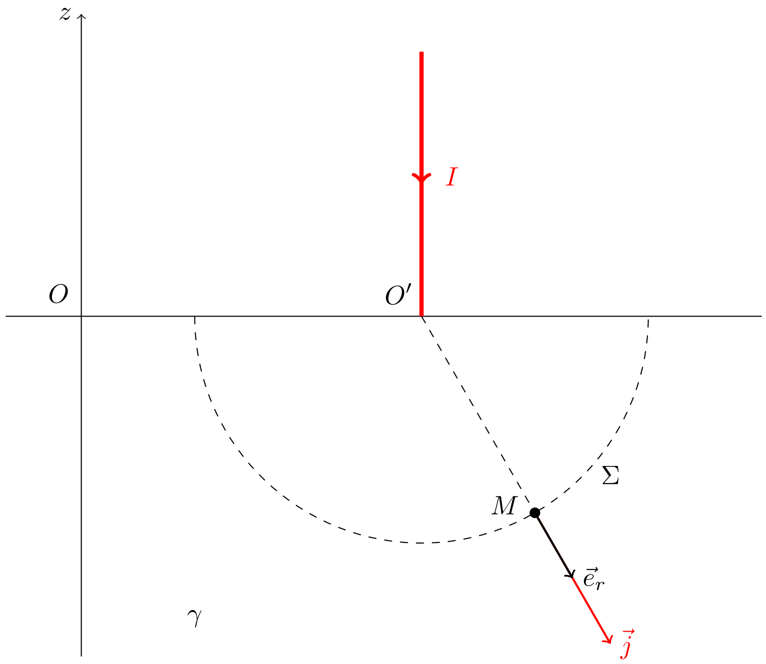
Paratonnerre

1. Faisons un schéma du problème physique,



Dans le sol conducteur, on suppose que la densité de courant est radiale,

$$\vec{j}(M) = j(r)\,\vec{e}_r$$

On choisit comme surface de Gauss la surface fermée constituée de la demi-sphère Σ de centre O' et de rayon r et de son disque de base. Le flux à travers le disque étant nul, seul celui à travers la demi-sphère contribue. L'intensité I_r qui traverse Σ vaut alors,

$$I_r = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

De plus, $j(r)$ est constant sur Σ, d'où,

$$I_r = j(r) \iint_\Sigma \mathrm{d}S = j(r)\,2\pi r^2$$

En régime stationnaire, il n'y a pas d'accumulation de charges, ce qui impose,

$$\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$$

D'où la conservation du flux de $\vec{j}$ et donc du courant au sein de la demi-sphère, ce qui donne,

$$I_r = I$$

Ainsi on obtient,

$$\boxed{j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}}$$

2. Le sol est modélisé comme un conducteur ohmique de conductivité γ, ce qui permet d'écrire localement la loi d'Ohm,

$$\vec{j} = \gamma\,\vec{E} \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}$$

Soit finalement,

$$\boxed{\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r \quad \text{avec} \quad E_r(r) = \frac{I}{2\pi\gamma r^2}}$$

Ensuite en utilisant la relation champ potentielle et l'expression du gradient en coordonnées sphériques on a,

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{e}_\phi\right)$$

Comme le champ électrostatique est selon $\vec{e}_r$ on a que V est indépendant de θ et ϕ et que donc,

$$V(M) = V(r)$$

Déterminons donc maintenant son expression,

$$\frac{dV}{dr} = -E_r(r) \quad \longrightarrow \quad \frac{dV}{dr} = -\frac{I}{2\pi\gamma r^2} \quad \longrightarrow \quad V(r) = \frac{I}{2\pi\gamma r} + C^{\text{te}}$$

En prenant pour,

$$V(r \to +\infty) = 0 \quad \longrightarrow \quad C^{\text{te}} = 0$$

Finalement on obtient,

$$\boxed{V(r) = \frac{I}{2\pi\gamma r}}$$

3. Déterminons dans un premier temps la différence de potentielle U entre les pieds d'un homme (en prenant h pour cette distance),

$$U = V(d) - V(d+h) = \frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+h}\right) = \frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{h}{d(d+h)}\right)$$

Posons l'hypothèse suivante (nous prendrons le soin de la vérifier à la fin),

$$h \ll d \quad \longrightarrow \quad d + h \sim d$$

Soit,

$$U = \frac{Ih}{2\pi\gamma d^2}$$

Exprimons maintenant le courant I_c reçu par le corps de résistance R, pour cela utilisons la loi d'Ohm,

$$I_c = \frac{U}{R} = \frac{Ih}{2\pi\gamma R d^2}$$

On veut maintenant connaître la distance minimale d telle que,

$$I_c < I_{\max} \quad \longrightarrow \quad \frac{Ih}{2\pi\gamma R d^2} < I_{\max}$$

Soit,

$$\boxed{d > \sqrt{\frac{Ih}{2\pi\gamma R I_{\max}}} = 113\,\text{m}}$$

Par ailleurs on a bien $d_{\min} \gg h$ ce qui valide l'hypothèse posée précédemment.