

Précession du Périhélie de Mercure

Mercure est la planète la plus proche du Soleil ; sa trajectoire est fortement excentrique, caractérisée par des distances minimale et maximale au Soleil nettement distinctes. Notant Oxy le plan de la trajectoire parcourue dans le sens direct, O le centre du référentiel galiléen d'étude (Soleil), le mouvement de Mercure sera assimilé à celui d'un point matériel M décrit en coordonnées polaires (r, θ) .

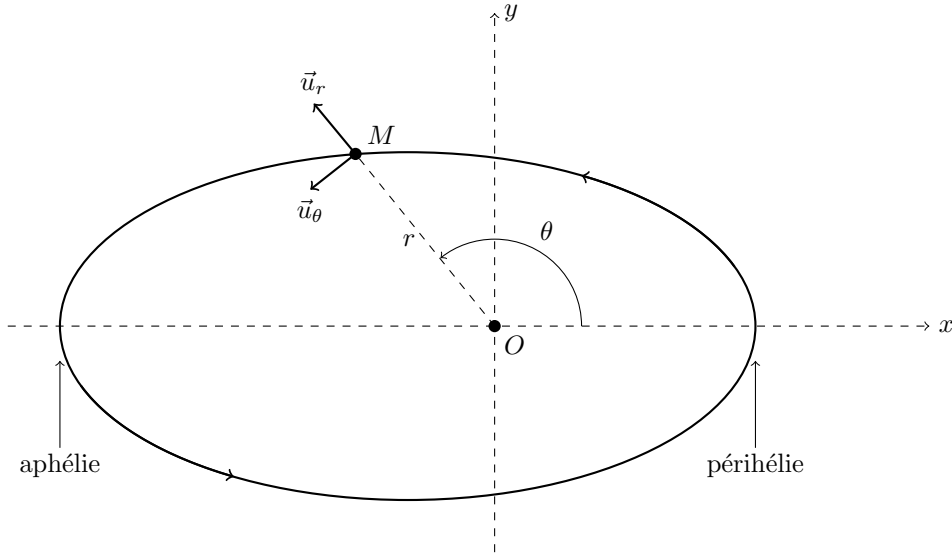


Figure 3 – Trajectoire de Mercure selon les lois de Kepler

1. On rappelle que la trajectoire de Mercure est une ellipse d'équation polaire $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ où p et e sont des constantes positives.

Exprimer p et e en fonction des distances aphélie r_{\max} et périhélie r_{\min} .

2. Montrer que l'accélération de M s'écrit $\vec{a} = -\frac{K}{r^2} \vec{u}_r$ et exprimer K . Montrer que $C_a = r^2 \dot{\theta}$; donner le nom de cette constante ainsi que son signe.

En relativité générale, l'accélération de M est modifiée et s'écrit,
$$\vec{a} = -\frac{GM_{\odot}}{r^2} \left[1 + \beta \frac{GM_{\odot}}{c^2 r} + \gamma \frac{v^2}{c^2} + \delta \frac{v_r^2}{c^2} \right] \vec{u}_r$$

Avec $v_r = \dot{r}$, $v_{\theta} = r\dot{\theta}$, $v^2 = v_r^2 + v_{\theta}^2$, et β, γ, δ des paramètres sans dimension.

On pose $u = 1/r$ et on rappelle la formule de Binet donnant l'accélération radiale ,
$$a_r = -C_a^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)$$

3. En utilisant l'expression de a_r , montrer que l'équation du mouvement se met sous la forme,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM_{\odot}}{C_a^2} + \frac{GM_{\odot}}{c^2 C_a^2} \left[\alpha_1 GM_{\odot} u + \alpha_2 C_a^2 u^2 + \alpha_3 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right]$$

Exprimer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en fonction de β, γ, δ .

4. Pour des valeurs de c très grande, l'équation du mouvement devient,

$$\frac{d^2 u_0}{d\theta^2} + u_0 = \frac{1}{p} \quad \text{avec} \quad p = \frac{C_a^2}{GM_\odot}$$

Résoudre cette équation différentielle. On choisira l'origine des angles de sorte que le périhélie soit en $\theta = 0$.

On cherche maintenant une solution sous la forme $u = u_0 + u_1$ avec $|u_1| \ll |u_0|$.

5. En négligeant les termes mixte, en u_1^2 et supérieurs, montrer que u_1 vérifie,

$$\frac{d^2 u_1}{d\theta^2} + u_1 = \frac{GM_\odot}{c^2 p^2} f(\theta)$$

où $f(\theta)$ est une fonction de θ et des paramètres e, β, γ, δ que l'on explicitera sous la forme développée jusqu'en e^2 .

On admet que la résolution de l'équation précédente conduit, après élimination des termes séculaires, à une précession du périhélie par tour donnée par,

$$\Delta\theta_{\text{tour}} = \frac{6\pi GM_\odot}{c^2 a(1 - e^2)}$$

6. Calculer numériquement $\Delta\theta_{\text{tour}}$ pour Mercure en radians, puis en secondes d'arc ($1 \text{ rad} = 206265''$).

On appelle précession séculaire la rotation lente du périhélie dans le plan de la trajectoire. Elle se mesure en secondes d'arc par siècle ($''/\text{siècle}$).

7. Sachant que Mercure effectue environ 415 tours par siècle, calculer la précession séculaire en secondes d'arc par siècle. Comparer à la valeur historique $43''/\text{siècle}$.

Données numériques

- Constante gravitationnelle : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- Masse du Soleil : $M_\odot = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$
- Célérité de la lumière : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Demi-grand axe de Mercure : $a \approx 5,8 \times 10^{10} \text{ m}$
- Excentricité de Mercure : $e \approx 0,206$