Précession du périhélie de Mercure

1. Comme rappelé dans l'énoncé la trajectoire de Mercure est une ellipse d'équation polaire $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ en étudiant cette équation au périhélie ($\theta = 0$) et à l'aphélie ($\theta = \pi$) on obtient les rayons suivants,

$$r_{\text{min}} = \frac{p}{1+e} \quad \text{et} \quad r_{\text{max}} = \frac{p}{1-e}$$

On va donc résoudre le système suivant,

$$\begin{cases} p = r_{\text{min}}(1+e) \\ p = r_{\text{max}}(1-e) \end{cases}$$

En égalisant les deux expressions on obtient,

$$r_{\text{min}}(1+e) = r_{\text{max}}(1-e) \implies e(r_{\text{min}} + r_{\text{max}}) = r_{\text{max}} - r_{\text{min}}$$

D'où,

$$\boxed{e = \frac{r_{\text{max}} - r_{\text{min}}}{r_{\text{max}} + r_{\text{min}}}}$$

Puis en réinjectant dans le système on obtient,

$$\boxed{p = \frac{2\, r_{\text{min}}\, r_{\text{max}}}{r_{\text{min}} + r_{\text{max}}}}$$

2. La force de gravitation exercée par le Soleil sur Mercure s'écrit,

$$\vec{F} = -\frac{GM_\odot m}{r^2}\,\vec{u}_r$$

Le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel Héliocentrique supposé galiléen donne,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \longrightarrow \quad \vec{a} = -\frac{GM_\odot}{r^2}\,\vec{u}_r$$

On a donc,

$$\boxed{\vec{a} = -\frac{K}{r^2}\vec{u}_r \quad \text{avec} \quad K = GM_\odot}$$

La force étant centrale, son moment par rapport à O est nul, $\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$. Le théorème du moment cinétique dans le référentiel galiléen donne alors,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$$

Ainsi, le moment cinétique $\vec{L}_O$ est constant et vaut,

$$\vec{L}_O = m\,\vec{r} \times \vec{v} = m\,(r\vec{u}_r) \times (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

On pose alors,

$$\boxed{C_a = r^2\dot{\theta}}$$

C_a est appelée **constante des aires**. Le mouvement se fait dans le sens direct (trigonométrique), donc $\dot{\theta} > 0$, par conséquent,

$$\boxed{C_a > 0}$$

3. On utilise la formule de Binet avec $u = 1/r$. donnée dans l'énoncé,

$$a_r = -C_a^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right)$$

L'expression relativiste de a_r est,

$$a_r = -\frac{GM_\odot}{r^2} \left[1 + \beta \frac{GM_\odot}{c^2 r} + \gamma \frac{v^2}{c^2} + \delta \frac{v_r^2}{c^2} \right]$$

Soit, en fonction de u,

$$a_r = -GM_\odot u^2 - \frac{GM_\odot}{c^2} u^2 \left[\beta GM_\odot u + \gamma v^2 + \delta v_r^2 \right]$$

On va essayer d'exprimer v_r et v_θ en fonction notamment de C_a. On sait d'après l'énoncé que,

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \quad \text{et} \quad C_a = \frac{\dot{\theta}}{u^2}$$

On va réécrire $\dot{r}$,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \dot{\theta} \frac{du}{d\theta} = -C_a \frac{du}{d\theta}$$

D'où,

$$\begin{cases} v_r = -C_a \dfrac{du}{d\theta} \\ v_\theta = u C_a \end{cases}$$

Et donc pour v,

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = C_a^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right]$$

En reportant dans l'expression de a_r,

$$a_r = -GM_\odot u^2 - \frac{GM_\odot}{c^2} u^2 \left[\beta GM_\odot u + \gamma C_a^2 \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) + \delta C_a^2 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right]$$

On égalise avec la formule de Binet,

$$-C_a^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) = -GM_\odot u^2 - \frac{GM_\odot}{c^2} u^2 \left[\beta GM_\odot u + \gamma C_a^2 \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) + \delta C_a^2 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right]$$

En divisant par $-C_a^2 u^2$ car non nul on obtient,

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM_\odot}{C_a^2} + \frac{GM_\odot}{c^2 C_a^2} \left[\beta GM_\odot u + \gamma C_a^2 u^2 + (\gamma + \delta) C_a^2 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right]}$$

On identifie donc,

$$\boxed{\alpha_1 = \beta \qquad \alpha_2 = \gamma \qquad \alpha_3 = \gamma + \delta}$$

4. On a une équation différentielle du type oscillateur harmonique avec second membre non nul,

$$u_0'' + u_0 = \frac{1}{p}$$

La solution générale de ce type d'équation différentielle est,

$$u_0(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta + \frac{1}{p}$$

Au périhélie ($\theta = 0$), la distance r est minimale, donc $u = 1/r$ est maximal. Par conséquent, la dérivée de u par rapport à θ s'annule en ce point,

$$\left.\frac{du_0}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 0$$

Calculons la dérivée et évaluons la en $\theta = 0$,

$$u_0'(\theta) = -A\sin\theta + B\cos\theta \quad \longrightarrow \quad u_0'(\theta = 0) = B = 0$$

Ainsi, on évalue la solution simplifié en $\theta = 0$,

$$u_0(\theta) = A\cos\theta + \frac{1}{p} \quad \longrightarrow \quad u_0(\theta = 0) = A + \frac{1}{p} = \frac{1}{r_{\min}} \quad \longrightarrow \quad A = \frac{e}{p}$$

Finalement,

$$\boxed{u_0(\theta) = \frac{1}{p}\big(1 + e\cos\theta\big)}$$

5. On pose $u = u_0 + u_1$ avec $|u_1| \ll |u_0|$. On injecte dans l'équation complète. L'équation non perturbée étant vérifiée par u_0, il reste,

$$u_1'' + u_1 = \frac{GM_\odot}{c^2 C_a^2}\Big[\beta GM_\odot u_0 + (\gamma+\delta)C_a^2(u_0')^2 + \gamma C_a^2 u_0^2\Big]$$

On utilise $C_a^2 = GM_\odot p$,

$$u_1'' + u_1 = \frac{1}{c^2 p}\Big[\beta GM_\odot u_0 + (\gamma+\delta)GM_\odot p(u_0')^2 + \gamma GM_\odot p u_0^2\Big]$$

On exprime u_0 et u_0',

$$u_0 = \frac{1 + e\cos\theta}{p}, \qquad u_0' = -\frac{e\sin\theta}{p}$$

En replaçant dans l'équation et en factorisant par $\dfrac{GM_\odot}{p}$,

$$u_1'' + u_1 = \frac{GM_\odot}{c^2 p^2}\Big[\beta(1 + e\cos\theta) + (\gamma+\delta)e^2\sin^2\theta + \gamma(1 + e\cos\theta)^2\Big]$$

On développe $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ et $(1 + e\cos\theta)^2 = 1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta$,

$$u_1'' + u_1 = \frac{GM_\odot}{c^2 p^2}\Big[\beta + \beta e\cos\theta + (\gamma+\delta)e^2(1 - \cos^2\theta) + \gamma + 2\gamma e\cos\theta + \gamma e^2\cos^2\theta\Big]$$

En regroupant les termes on a,

$$u_1'' + u_1 = \frac{GM_\odot}{c^2 p^2}\Big[\beta + \gamma + (\gamma+\delta)e^2 + e(\beta + 2\gamma)\cos\theta - \delta e^2\cos^2\theta\Big]$$

Finalement,

$$\boxed{\frac{d^2u_1}{d\theta^2} + u_1 = \frac{GM_\odot}{c^2p^2}\, f(\theta) \quad \text{avec} \quad f(\theta) = \beta + \gamma + (\gamma + \delta)e^2 + e(\beta + 2\gamma)\cos\theta - \delta e^2 \cos^2\theta}$$

6. Application numérique donne,

$$\boxed{\Delta\theta_{\text{tour}} \approx 5,0 \times 10^{-7} \text{ rad} \approx 0,103''}$$

7. La précession séculaire vaut,

$$\Delta\theta_{\text{siècle}} = 415 \times 0,103'' \approx 42,7''$$

On obtient,

$$\boxed{\Delta\theta_{\text{siècle}} \approx 43''}$$

Cette valeur est en excellent accord avec la mesure historique de $43''$ par siècle, ce qui constitue une des premières confirmations de la relativité générale.