Acrobaties

1. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et O,

$$\Delta_{A\to O}\mathcal{E}_c = \sum_i W_{A\to O}(\vec{F_i})$$

On obtient,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$$

Comme la vitesse en A est nulle et que le travail de la force de réaction est nul, on a,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg(y_A - y_O) = mgh$$

On en déduit,

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gh}}$$

2. On applique maintenant le théorème de l'énergie cinétique entre O et M,

$$\Delta_{O\to M}\mathcal{E}_c = \sum_i W_{O\to M}(\vec{F_i})$$

On obtient,

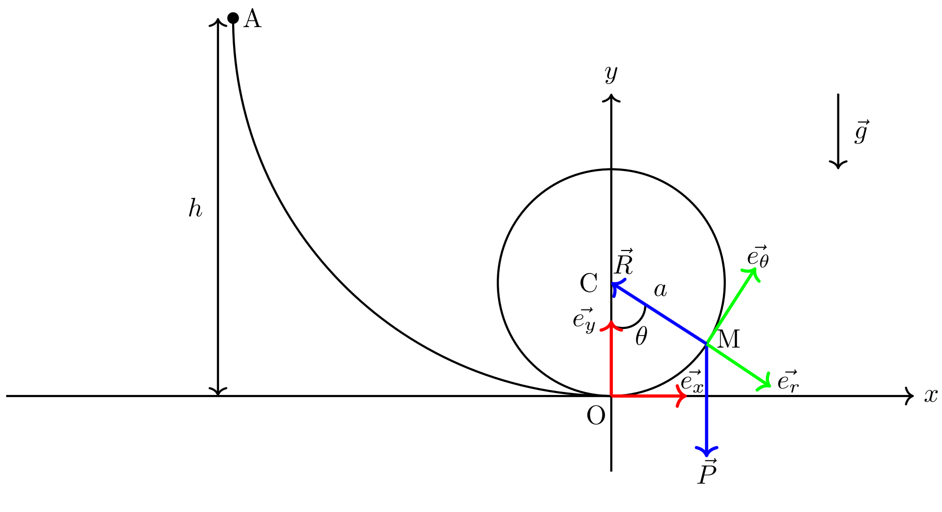
$$\frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(y_O - y_M) = -mgy_M = -mga(1-\cos\theta)$$

Ainsi,

$$v_M^2 = v_0^2 - 2ga(1-\cos\theta)$$

Enfin, on obtient,

$$\boxed{v_M = \sqrt{2g\big(h + a(\cos\theta - 1)\big)}}$$



3. On applique le principe fondamental de la dynamique pour un mouvement circulaire et exprimé dans la base polaire,

$$\begin{cases} m\vec{a} = \sum \vec{F_{\text{ext}}} = \vec{R} + \vec{P} \\ \vec{a} = (\dot{a} - a\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (a\ddot{\theta} + 2\dot{a}\dot{\theta})\vec{e_\theta} + \ddot{z}\vec{e_z} \end{cases}$$

En faisant la projection selon le vecteur $\vec{e_r}$ on obtient,

$$m(\dot{a} - a\dot{\theta}^2) = mg\cos\theta - R$$

Or, on a un mouvement circulaire uniforme de rayon a=C$^{\text{te}}$ et de vitesse angulaire $\dot{\theta}$ pour laquelle on a la relation suivante,

$$v_M = a\dot{\theta} \quad \longrightarrow \quad a\dot{\theta}^2 = \frac{v_M^2}{a} = \frac{2g}{a}(h + a(\cos\theta - 1))$$

En utilisant ces résultats, on obtient,

$$R = mg\cos\theta + \frac{2mg}{a}(h + a(\cos\theta - 1)) = mg\left(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right)$$

Finalement, comme $\vec{R} = -R\vec{e_r}$ on a,

$$\boxed{\vec{R} = -mg\left(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right)\vec{e_r}}$$

4. a. Si nous avons $v = 0$ et $R \neq 0$ alors cela signifie que le patineur est à l'arrêt, mais la surface cylindrique continue d'exercer une force sur lui. Cela pourrait être un point d'équilibre temporaire, mais instable.

   b. Si nous avons $R = 0$ et $v \neq 0$ alors cela correspond à la perte de contact avec la surface cylindrique. Le patineur quittera la trajectoire circulaire et suivra une trajectoire parabolique sous l'effet de la gravité.

   c. Pour que le patineur puisse faire un tour complet du cylindre il faut que la réaction ne s'annule en aucun point du cercle. L'expression précédente de la réaction R nous indique qu'elle est minimale lorsque $\theta = \pi$, on souhaite donc que $R(\theta = \pi) > 0$.

   Ainsi, on a,

$$R(\theta = \pi) = mg\left(\frac{2h}{a} - 5\right) > 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{2h}{a} > 5$$

   Ainsi la valeur minimale de h est,

$$\boxed{h_{\text{min}} > \frac{5a}{2}}$$