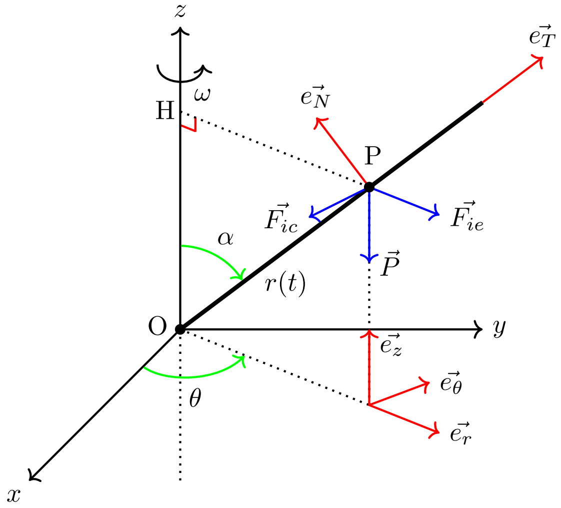
Anneau en rotation

Schéma du système mécanique étudié :



1. Dans le référentiel tournant, on a :
   - Le vecteur directeur de la tige : $\vec{e_T} = \sin(\alpha)\vec{e_r} + \cos(\alpha)\vec{e_z}$
   - Le vecteur postion : $\vec{OP} = r\vec{e_T}$
   - Le vecteur vitesse : $\vec{v}(P)_{/\mathcal{R}'} = \dot{r}\vec{e_T}$
   - Le vecteur accélération : $\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}'} = \ddot{r}\vec{e_T}$

   On fait le bilan des forces :
   - Le poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$
   - La force d'inertie d'entraînement : $\vec{F_{ie}} = m\omega^2\vec{HP} = m\omega^2 r\sin(\alpha)\vec{e_r}$
   - La force d'inertie de Coriolis : $\vec{F_{ic}} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(P)_{/\mathcal{R}'} = -2m\omega\dot{r}\vec{e_z} \wedge \vec{e_T} = -2m\omega\dot{r}\sin(\alpha)\vec{e_\theta}$
   - La réaction du support : $\vec{R} = R_N\vec{e_N} + R_\theta\vec{e_\theta}$

   Donc, d'après la première loi de Newton
   $$\sum \vec{F_{ext}} = \vec{0} \iff \vec{P} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}} + \vec{R} = \vec{0}$$

   On a alors,
   $$-mg\vec{e_z} \;+\; m\omega^2 r_e\sin(\alpha)\vec{e_r} - 2m\omega\dot{r}\sin(\alpha)\vec{e_\theta} + R_N\vec{e_N} + R_\theta\vec{e_\theta} = \vec{0}$$

   On fait la projection selon $\vec{e_T}$ afin d'éliminer les composante inconnues de la réaction,
   $$-mg\underbrace{\vec{e_z}\cdot\vec{e_T}}_{=\cos(\alpha)} \;+\; m\omega^2 r_e\sin(\alpha)\underbrace{\vec{e_r}\cdot\vec{e_T}}_{=\sin(\alpha)} \;-\; \underbrace{2m\omega\dot{r}\sin(\alpha)\vec{e_\theta}\cdot\vec{e_T}}_{=0 \text{ car } \vec{e_\theta}\perp\vec{e_T}} \;+\; \underbrace{\vec{R}\cdot\vec{e_T}}_{=0 \text{ car } \vec{R}\perp\vec{e_T}} \;= 0$$

   Donc, la position d'équilibre est,
   $$\boxed{r_e = \frac{g\cos(\alpha)}{\omega^2\sin^2(\alpha)}}$$

   C'est une position d'équilibre **instable** car si le poids est prédominant devant la force d'inertie d'entraînement l'anneau se déplacera vers O et dans le cas inverse l'anneau se déplacera vers l'extrémité de la tige.

2. D'après la deuxième loi de Newton,

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}'} \iff \vec{P} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}} + \vec{R} = m\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}'}$$

On fait la projection selon $\vec{e_T}$,

$$-mg\cos(\alpha) \quad + \quad m\omega^2 r\sin^2(\alpha) = m\ddot{r}$$

On obtient donc l'équation différentielle suivante,

$$\boxed{\ddot{r} - \Omega^2 r = -g\cos(\alpha) \quad \text{avec} \quad \Omega = \omega\sin(\alpha)}$$

La solution générale est de la forme ,

$$r(t) = A\cosh(\Omega t) + B\sinh(\Omega t) + r_e$$

On détermine la solution grâce aux conditions initiales : $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$

$$\text{On a donc,} \qquad \begin{cases} A + r_e = r_0 \\ B\Omega\cosh(\Omega t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = r_0 - r_e \\ B = 0 \end{cases}$$

Ainsi on obtient,

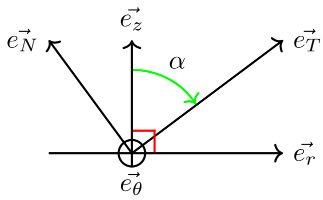
$$\boxed{r(t) = (r_0 - r_e)\cosh(\Omega t) + r_e \quad \text{avec} \quad \Omega = \omega\sin(\alpha)}$$

Etude du sens du mouvement :

- Si $r_0 > r_e$, on a $r(t) > r_e$, ainsi la bille se déplacera vers la droite du point d'équilibre et tendra à s'échapper de la tige.

- Si $r_0 < r_e$, on a $r(t) < r_e$, ainsi la bille se déplacera vers la gauche du point d'équilibre et tendra à aller vers le point O.

3. Schéma des projections :



On a le vecteur normal à la tige : $\vec{e_N} = \sin(\alpha)\vec{e_z} - \cos(\alpha)\vec{e_r}$

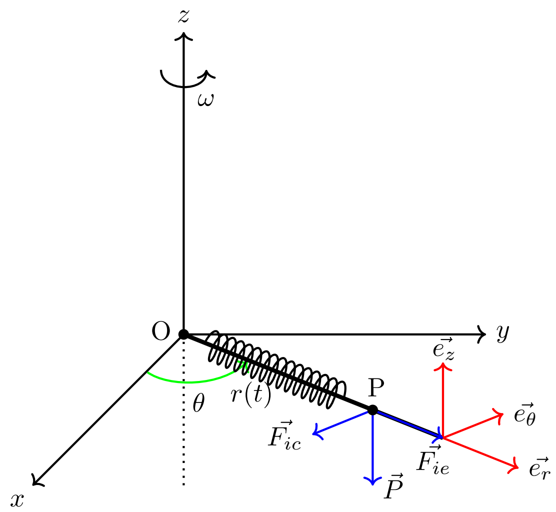
Donc si on fait la projection de la deuxième loi de newton selon le vecteur $\vec{e_N}$ et le vecteur $\vec{e_\theta}$ on obtiendra les deux composantes de la réaction de la tige sur l'anneau :

$$\begin{array}{ll} \text{selon } \vec{e_N} : & \left\{ \begin{array}{l} -mg\underbrace{\vec{e_z}\cdot\vec{e_N}}_{=\sin(\alpha)} + m\omega^2 r\sin(\alpha)\underbrace{\vec{e_r}\cdot\vec{e_N}}_{=-\cos(\alpha)} - \underbrace{2m\omega\dot{r}\sin(\alpha)\vec{e_\theta}\cdot\vec{e_N}}_{=0 \text{ car } \vec{e_\theta}\perp\cdot\vec{e_N}} + R_N = 0 \\ \\ -2m\omega\dot{r}\sin(\alpha) + R_\theta = 0 \end{array} \right. \\ \text{selon } \vec{e_\theta} : & \end{array}$$

$$\implies \begin{cases} -mg\sin(\alpha) - m\omega(r_0 - r_e)\Omega\mathrm{ch}(\Omega t)\cos(\alpha) + R_N = 0 \\ \\ -2m\Omega^2(r_0 - r_e)\cosh(\Omega t) + R_\theta = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{On a donc, } \begin{cases} R_N = mg\sin(\alpha) + m\omega(r_0 - r_e)\Omega\cosh(\Omega t)\cos(\alpha) \\ R_\theta = 2m\Omega^2(r_0 - r_e)\cosh(\Omega t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \Omega = \omega\sin(\alpha)}$$

4. Schéma du système mécanique étudié :



- Dans le référentiel tournant, on a :
  - vecteur postion : $\vec{OP} = r\vec{e_r}$
  - vecteur vitesse : $\vec{v}(P)_{/\mathcal{R}'} = \dot{r}\vec{e_r}$
  - vecteur accélération : $\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}'} = \ddot{r}\vec{e_r}$

  On fait le bilan des forces :
  - Le poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$
  - Force d'inertie d'entraînement : $\vec{F_{ie}} = m\omega^2\vec{OP} = m\omega^2 r\vec{e_r}$
  - Force d'inertie de Coriolis : $\vec{F_{ic}} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(P)_{/\mathcal{R}'} = -2m\omega\dot{r}\vec{e_z} \wedge \vec{e_r} = -2m\omega\dot{r}\vec{e_\theta}$
  - Réaction du support : $\vec{R} = R_\theta\vec{e_\theta} + R_z\vec{e_z}$
  - Tension du ressort : $\vec{T} = -k(r - r_0)\vec{e_r}$

  Donc, d'après la première loi de Newton,

$$\sum \vec{F_{ext}} = \vec{0} \iff \vec{P} + \vec{T} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}} + \vec{R} = \vec{0}$$

  On fait la projection selon $\vec{e_r}$ afin d'éliminer les composante inconnues de la réaction,

$$m\omega^2 r_e - k(r_e - r_0) = 0 \iff r_e(m\omega^2 - k) = -kr_0 \iff r_e = \frac{-kr_0}{m\omega^2 - k}$$

  Donc, la position d'équilibre est,

$$\boxed{r_e = r_0\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

  Si on a $\omega < \omega_0$ on aura $r_e > 0$ ce qui entrainera un **équilibre stable**, en effet comme la tension du ressort prédomine sur la force d'inertie de Coriolis les perturbation feront revenir l'anneau vers r_e. De même, si on a $\omega > \omega_0$ on aura $r_e < 0$ ce qui entrainera un **équilibre instable**.

- D'après la deuxième loi de Newton,

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}'} \iff \vec{P} + \vec{T} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}} + \vec{R} = m\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}'}$$

On fait la projection selon $\vec{e_r}$,

$$m\omega^2 r - k(r - r_0) = m\ddot{r}$$

On obtient donc l'équation différentielle suivante,

$$\boxed{\ddot{r} - (\omega_0^2 - \omega^2)r = \omega_0^2 r_0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

* Si $\omega < \omega_0$, l'équation caractéristique devient,

$$\ddot{\rho} + \Omega_1^2 \rho = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$$

La solution générale est,

$$r(t) = A\cos(\Omega_1 t) + B\sin(\Omega_1 t) + r_e$$

On détermine la solution grâce aux conditions initiales : $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$

$$\text{On a donc,} \quad \begin{cases} A + r_e = r_0 \\ B\Omega_1 \cos(\Omega_1 t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = r_0 - r_e \\ B = 0 \end{cases}$$

Ainsi on obtient,

$$\boxed{r(t) = (r_0 - r_e)\cos(\Omega_1 t) + r_e \quad \text{avec} \quad \Omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

- Si $r_0 > r_e$: au départ $r(t) > r_e$ l'anneau oscille autour de r_e mais revient vers r_e.
- Si $r_0 < r_e$: au départ $r(t) < r_e$ l'anneau oscille autour de r_e et revient vers r_e.

* Si $\omega > \omega_0$, l'équation caractéristique devient,

$$\ddot{\rho} - \Omega_2^2 \rho = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega_2 = \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$$

La solution générale est,

$$r(t) = A\cosh(\Omega_2 t) + B\sinh(\Omega_2 t) + r_e$$

On détermine la solution grâce aux conditions initiales : $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$

$$\text{On a donc,} \quad \begin{cases} A + r_e = r_0 \\ B\Omega_2 \cosh(\Omega_2 t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = r_0 - r_e \\ B = 0 \end{cases}$$

Ainsi on obtient,

$$\boxed{r(t) = (r_0 - r_e)\cosh(\Omega_2 t) + r_e \quad \text{avec} \quad \Omega_2 = \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

- Si $r_0 > r_e$: $r(t) > r_e$ et croît exponentiellement donc l'anneau s'éloigne vers l'extrémité.
- Si $r_0 < r_e$: $r(t) < r_e$ et décroît exponentiellement donc l'anneau se rapproche de O.