Étude d'un accéléromètre pendulaire (X-2014)

L'accéléromètre ADLX qui équipe les manettes des consoles Nintendo WiiU^{TM} est un accéléromètre de type pendulaire. La fiche constructeur précise qu'il peut mesurer des accélérations comprises entre $-5g$ et $+5g$, que la plus petite accélération mesurable est de $0,01g$, et qu'il peut résister à des chocs allant jusqu'à $10000g$.

Un accéléromètre pendulaire peut être assimilé à un système masse-ressort amorti, dont le schéma de principe est présenté sur la figure 1. L'accéléromètre se compose d'une masse d'épreuve m, astreinte à se déplacer selon un axe $\vec{u}$ solidaire du boîtier extérieur de l'accéléromètre. La masse d'épreuve est reliée au boîtier par un ressort de raideur k. On note X la position de la masse d'épreuve par rapport au centre du boîtier. La position au repos de la masse d'épreuve, lorsque l'axe $\vec{u}$ est horizontal, est $X = 0$. On suppose que la masse d'épreuve subit également une force de frottement visqueux $\vec{F} = -2m\gamma\dot{X}\vec{u}$ où γ est une constante positive.

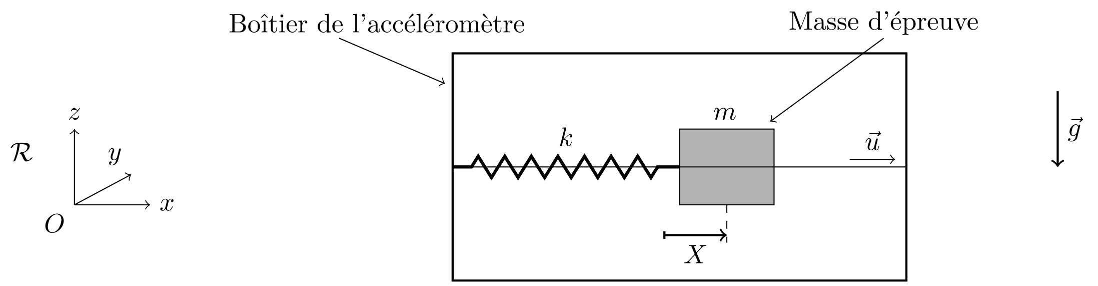

Figure 1 : Schéma de principe de l'accéléromètre

Le boîtier se déplace dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé Galiléen et on note $\vec{a}$ son accélération dans ce référentiel. Lorsque le boîtier subit une accélération, la masse d'épreuve quitte sa position d'équilibre. La mesure de la position X permet alors de déduire l'accélération du boîtier.

On suppose tout d'abord que l'accéléromètre garde une orientation fixe et horizontale selon l'axe Ox ($\vec{u} = \vec{e}_x$). De plus, l'accéléromètre ne se déplace que selon l'axe Ox ($\vec{a} = a(t)\vec{e}_x$). On note $\omega_r = \sqrt{k/m}$

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par la variable X, faisant intervenir ω_r, γ et $a(t)$.

On suppose que l'accéléromètre ainsi que sa masse d'épreuve sont immobiles pour des temps t négatifs, et que l'accéléromètre subit une accélération constante $\vec{a} = a\vec{e}_x$ pour les temps t positifs.

2. Donner l'expression de la solution de l'équation différentielle dans le cas faiblement amorti où $\gamma < \omega_r$ et dans le cas fortement amorti où $\gamma > \omega_r$. On ne cherchera pas à calculer les constantes d'intégration qui apparaissent dans les expressions.

3. Montrer que dans les deux cas, faiblement et fortement amorti, $X(t)$ tend vers une valeur stationnaire dont on donnera l'expression.

4. Tracer l'allure de $X(t)$ dans les deux cas, faiblement et fortement amortis.

On appelle temps de réponse de l'accéléromètre le temps caractéristique pour que $X(t)$ atteigne le régime stationnaire.

5. Donner le temps de réponse de l'accéléromètre dans les deux cas, faiblement et fortement amorti.

6. Tracer l'allure du temps de réponse de l'accéléromètre en fonction du paramètre γ, pour une pulsation ω_r fixée.

7. . D'après le graphe de la question précédente, quel est le temps de réponse minimal pour un accéléromètre de pulsation ω_r donnée ?

D'après la fiche constructeur, l'accéléromètre ADLX possède les caractéristiques suivantes : pulsation de résonance $\omega_r = 2\pi \times 5500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, facteur de qualité $Q = \omega_r/\gamma = 5$.

8. Donner la valeur du temps de réponse de l'accéléromètre, ainsi que celle du déplacement stationnaire de la masse d'épreuve pour une accélération de $1g$.