Étude d'un accéléromètre pendulaire (X-2014)

1. On commence par faire le bilan des forces exercées sur la masse d'épreuve,

   Le poids : $\vec{P} = mg\vec{e}_z$
   La force de frottement visqueux : $\vec{F} = -2m\gamma\dot{X}\vec{u}$
   La force d'inertie d'entrainement : $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = -ma(t)\vec{u}$
   La tension du ressort : $\vec{T} = -kX\vec{u}$
   La réaction du support : $\vec{R}_N$

   On applique le Principe Fondamental de la Dynamique dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ lié au boîtier, en translation accélérée par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{R}_N + \vec{T} = m\vec{a}_{(\mathcal{R}')}$$

   En projetant selon $\vec{u}$ on obtient,

$$-2m\gamma\dot{X} - kX - ma(t) = m\ddot{X}$$

   Soit l'équation différentielle vérifiée par X mise sous forme canonique,

$$\boxed{\ddot{X} + 2\gamma\dot{X} + \omega_r^2 X = -a(t) \quad \text{avec} \quad \omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

2. Dans un premier temps donnons l'équation caractéristique associée à l'équation homogène que l'on étudira,

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_r^2 = 0$$

   Son discriminant réduit donne,

$$\delta = \gamma^2 - \omega_r^2$$

   On effectue une disjonction de cas selon le signe de δ.

   - Le cas où $\gamma < \omega_r$, par conséquent $\delta < 0$, on est donc en régime pseudo-périodique,

$$r = -\gamma \pm j\sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2}$$

     On pose,

$$\Omega_1 = \sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2}$$

     La solution de l'équation homogène est,

$$X_h(t) = e^{-\gamma t}(A\cos(\Omega_1 t) + B\sin(\Omega_1 t))$$

     La solution générale s'écrit donc,

$$\boxed{X(t) = e^{-\gamma t}\left(A\cos(\Omega_1 t) + B\sin(\Omega_1 t)\right) + X_p}$$

- Le cas où $\gamma > \omega_r$, par conséquent $\delta > 0$, on est donc en régime apériodique,

$$r = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2}$$

On pose,

$$\Omega_2 = \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2}$$

La solution de l'équation homogène est,

$$X_h(t) = Ae^{-(\gamma+\Omega_2)t} + Be^{-(\gamma-\Omega_2)t}$$

La solution générale s'écrit donc,

$$\boxed{X(t) = Ae^{-(\gamma+\Omega_2)t} + Be^{-(\gamma-\Omega_2)t} + X_p}$$

3. Dans les deux cas, les termes transitoires s'annulent lorsque $t \to +\infty$, et le système tend vers un régime stationnaire constant.

En régime permanent, on a $\dot{X} = \ddot{X} = 0$, donc,

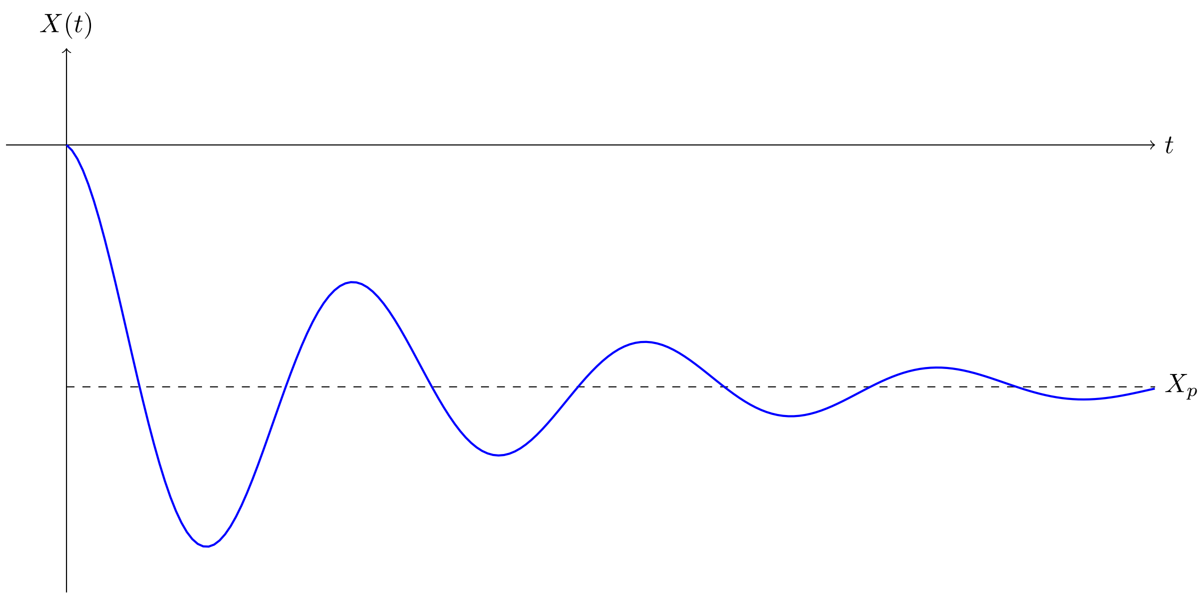
$$\omega_r^2 X_p = -a$$

d'où,

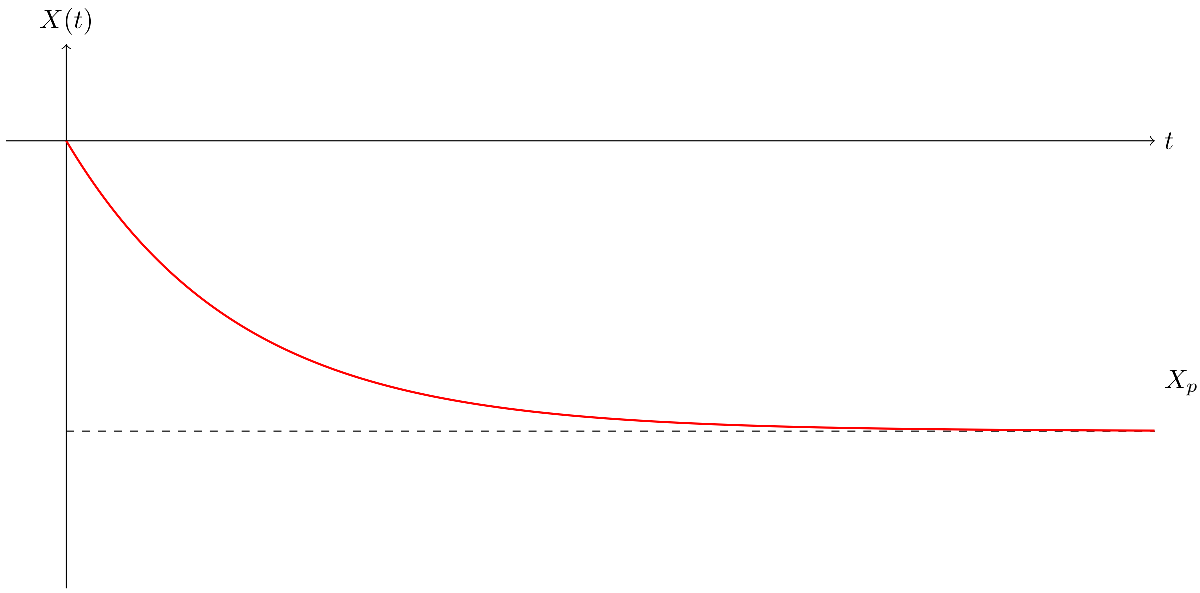
$$\boxed{X_p = -\frac{a}{\omega_r^2}}$$

4. Traçons maintenant l'allure de $X(t)$ dans les deux cas, faiblement et fortement amortis.

- Faiblement amortis,



- Fortement amortis,



5. Le temps de réponse est défini comme le temps caractéristique d'établissement du régime permanent, c'est-à-dire le temps au bout duquel les termes transitoires deviennent négligeables devant la solution stationnaire.

   - On a d'après la deuxième question dans le cas du régime pseudo-périodique, la solution homogène suivante,

     $$X_h(t) = e^{-\gamma t}\left(A\cos(\Omega_1 t) + B\sin(\Omega_1 t)\right) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(A\cos(\Omega_1 t) + B\sin(\Omega_1 t)\right)$$

     On identifie alors :

     $$\boxed{\tau = \frac{1}{\gamma}}$$

   - On a d'après la deuxième question dans le cas du régime apériodique, la solution homogène suivante,

     $$X_h(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{avec} \quad r_{1,2} = -\gamma \pm \Omega_2$$

     Le temps de réponse est gouverné par le mode transitoire le plus lent, correspondant à la racine réelle la plus proche de zéro. On a donc,

     $$r_1 = -\gamma + \Omega_2$$

     Le temps caractéristique est donc :

     $$\tau = -\frac{1}{r_1}$$

     Soit,

     $$\boxed{\tau = \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2}}}$$

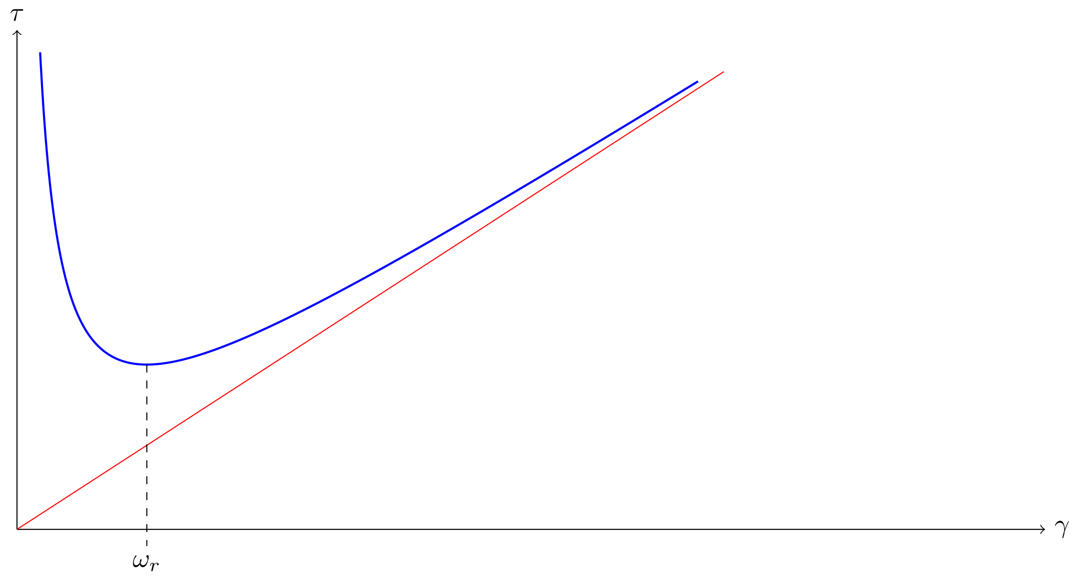
6. Étudions le temps de réponse τ de l'accéléromètre en fonction de γ pour une pulsation ω_r fixée,

- Dans le cas où $\gamma < \omega_r$, on a,

$$\tau \propto \frac{1}{\gamma}$$

- Dans le cas où $\gamma > \omega_r$ on va chercher une expression asymptotique soit pour $\gamma \gg \omega_r$,

$$\tau = \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2}} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_r^2}{\gamma^2}}\right)} \underset{\text{DL}_1}{\simeq} \frac{1}{\gamma \left(1 - \left(1 - \frac{\omega_r^2}{2\gamma^2}\right)\right)} = \frac{1}{\gamma \cdot \frac{\omega_r^2}{2\gamma^2}} = \frac{2\gamma}{\omega_r^2} \propto \gamma$$



7. On sait grâce au schéma précédent que le temps de réponse minimal est obtenu en $\gamma = \omega_r$. Autrement dit c'est le temps de réponse en régime critique. Or on sait qu'en régime critique on a,

$$\boxed{\tau_{\min} = \frac{1}{\omega_r}}$$

8. D'après l'énoncé on a $\gamma < \omega_r$ on se trouve donc dans le régime pseudo-périodique.

   - Pour le temps de réponse on sait que pour le régime pseudo-périodique on a,

   $$\tau = \frac{1}{\gamma} \quad \longrightarrow \quad \tau = \frac{5}{\omega_r}$$

   L'application numérique donne,

   $$\boxed{\tau = 145\,\mu\text{s}}$$

   - Pour le déplacement stationnaire de la masse d'épreuve pour une accélération de $1g$ on a,

   $$X_p = \frac{a}{\omega_r^2} = \frac{g}{\omega_r^2}$$

   L'application numérique donne,

   $$\boxed{X_p = 8,2\,\text{nm}}$$