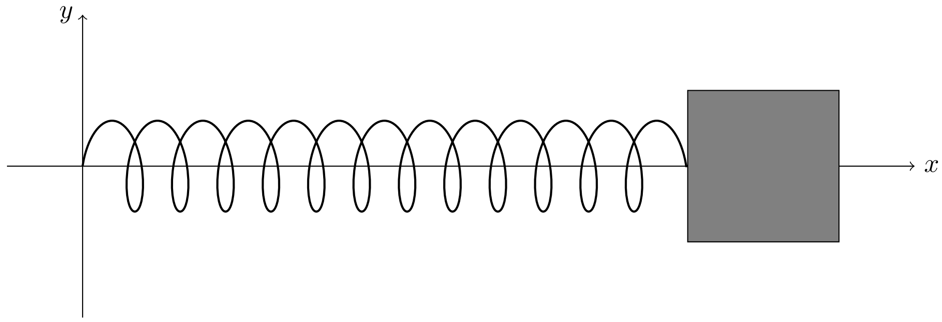
Modes propres d'un ressort

Un ressort horizontal de longueur à vide L dont une extrémité est fixée en O est accrochée par l'autre extrémité à un pavé de masse M se déplaçant sans frottement le long de l'axe Ox. On note μ_1 la masse linéique du ressort. On repère le mouvement d'une spire située à l''abscisse x au repos par sa position $x + \xi(x,t)$. Si on coupe fictivement le ressort à l'abscisse x, la force exercée par la partie droite sur la partie gauche est donnée par la loi de Hooke : $\vec{F} = K\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\vec{e_x}$ où K est une caractéristique du matériau.



1. On considère la tranche de ressort de masse $\mu_1 dx$, située au repos entre x et $x+dx$. On admet que les forces que subissent ses extrémités peuvent être évaluées comme si les extrémités de la tranche mobile étaient en x et $x+dx$. Montrer que $\xi(x,t)$ est solution d'une équation de d'Alembert et exprime la célérité c associée.

On cherche des modes propres, c'est-à-dire des solutions en ondes stationnaires de la forme $\xi(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$.

2. a. Quelle est la condition aux limites imposée en $x = 0$? En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de ω, x c à une constante multiplicative près, puis celle de $\xi(x,t)$.

   b. Quelle est la condition aux limites imposée par la masse M en $x = L$? En déduire que ω est solution de la relation suivante,
   $$\cot\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{Mc\omega}{K}$$
   Discuter graphiquement de l'existence de modes propres.

   c. Étudier le cas $\mu_1 \to 0$; quelle situation retrouve-t-on ?