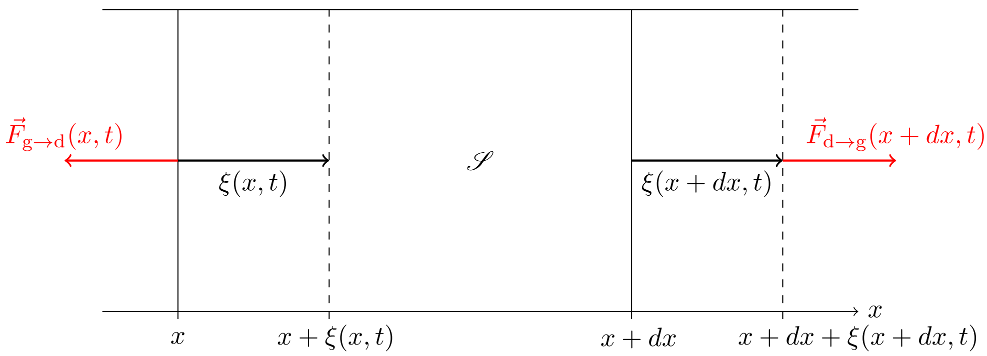
Modes propres d'un ressort

1. Faisons un schéma du problème physique,



On applique le principe fondamental de la dynamique à la tranche de ressort,

$$dm\vec{a} = \vec{F}_{\mathrm{d}\to\mathrm{g}}(x+dx,t) + \vec{F}_{\mathrm{g}\to\mathrm{d}}(x,t)$$

On fait la projection sur l'axe Ox,

$$\mu_1 dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x,t) = K\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}(x+dx,t) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)\right) \quad \longrightarrow \quad \mu_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x,t) = K\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x,t)$$

Finalement, on obtient l'équation de d'Alembert vérifiée par $\xi(x,t)$,

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x,t) \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{K}{\mu_1}}}$$

2. a. Comme le ressort est fixé en $x = 0$ on a la condition aux limites suivante,

$$\boxed{\xi(x=0,t) = 0 \quad \forall t}$$

On cherche des solutions en ondes stationnaires de la forme, $\xi(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x,t) \quad \longrightarrow \quad \cos(x,t)f''(x) = \frac{1}{c^2}f(x)(-\cos(\omega t)\omega^2) \quad \longrightarrow \quad f''(x)+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f(x) = 0$$

On obtient donc une équation différentielle du second ordre vérifiée par $f(x)$,

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0 \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

On a donc des solutions de la forme,

$$f(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \quad \text{avec} \quad \text{A,B des constantes à déterminer}$$

Avec la première condition aux limites en $x = 0$,

$$\begin{cases} \xi(x=0,t) = f(0)\cos(\omega t) = 0 \quad \rightarrow \quad f(0) = 0 \quad \forall t \\ f(x=0) = A \end{cases} \quad \longrightarrow \quad A = 0$$

Finalement on obtient,

$$\boxed{f(x) = B\sin(kx) \quad \text{et} \quad \xi(x,t) = B\sin(kx)\cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}}$$

b. Comme le ressort est fixé à un pavé de masse M, on applique le principe fondamental de la dynamique à la masse M placé en $x = L$, on a donc la condition aux limites suivante,

$$\boxed{M \left.\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right|_{x=L} = K \left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_{x=L}}$$

On obtient donc,

$$-M\omega^2 B \sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) = \frac{\omega}{c} K B \cos\left(\frac{\omega}{c}L\right) \quad \longrightarrow \quad \frac{\cos\left(\frac{\omega}{c}L\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{c}L\right)} = \frac{Mc\omega}{K}$$

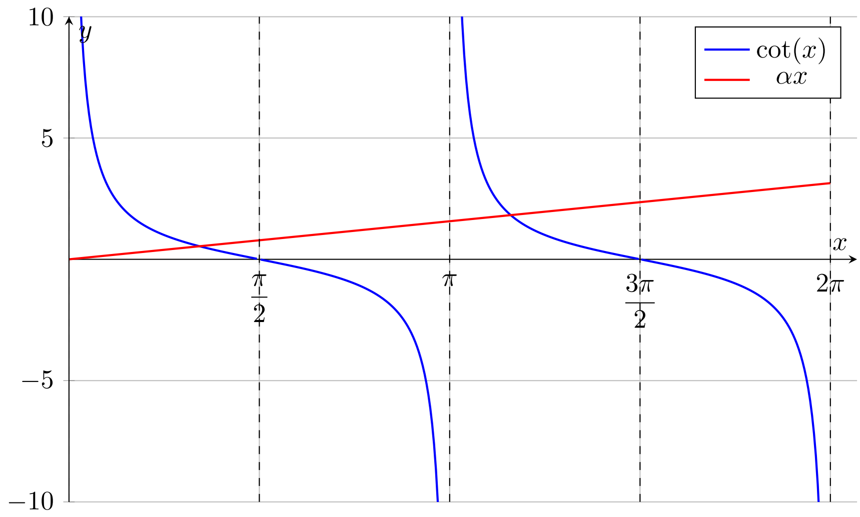
Soit,

$$\boxed{\cot\left(\frac{\omega}{c}L\right) = \frac{Mc\omega}{K}}$$

On a une équation de la forme,

$$cot(x) = \alpha x \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{Mc^2}{KL} > 0$$

En tracant $\cot(x)$, fonction périodique avec asymptotes verticales, et la droite croissante $y = \alpha x$, on observe une intersection par intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$, ce qui montre l'existence d'une infinité discrète de modes propres.



c. Étudions le cas $\mu_1 \to 0$, on a

$$c = \sqrt{\frac{K}{\mu_1}} \xrightarrow[\mu_1 \to 0]{} +\infty \qquad \text{donc} \qquad \frac{\omega L}{c} \xrightarrow[c \to \infty]{} 0$$

Ainsi on a,

$$cot\left(\frac{\omega}{c}L\right) \simeq \frac{c}{\omega L}$$

Donc la relation précédente devient,

$$\frac{c}{\omega L} \simeq \frac{Mc\omega}{K} \quad \longrightarrow \quad \omega^2 \simeq \frac{K}{ML}$$

On se ramène au cas du ressort sans masse et de raideur équivalente,

$$\boxed{k = \frac{K}{L}}$$

On se retrouve donc dans le cas d'un **oscillateur harmonique "simple"**, de pulsation,

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}}$$