Mouvement dans les champs électrique et magnétique

1. On applique le principe fondamental de la dynamique à la particule de masse m,

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \longrightarrow \quad m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q \left(\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

   Ainsi on obtient les équation différentielles suivantes,

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{x}(t) = \dfrac{qE}{m} \\ \ddot{y}(t) = \dfrac{qB}{m}\dot{z} \\ \ddot{z}(t) = -\dfrac{qB}{m}\dot{y} \end{cases}}$$

2. Déterminons maintenant la loi horaire $x(t)$,

$$\ddot{x}(t) = \frac{qE}{m} \quad \longrightarrow \quad \dot{x}(t) = \frac{qE}{m}t + C_1$$

   On a initialement, $\dot{x}(t=0) = 0$ donc $C_1 = 0$,

$$\dot{x}(t) = \frac{qE}{m}t \quad \longrightarrow \quad x(t) = \frac{qE}{2m}t^2 + C_2$$

   On a initialement, $x(t=0) = 0$ donc $C_2 = 0$,

   Ainsi on obtient,

$$\boxed{x(t) = \frac{qE}{2m}t^2}$$

3. a. Reprenons les équations différentielles couplées,

$$\begin{cases} \ddot{y} = \omega_c \dot{z} \\ \ddot{z} = -\omega_c \dot{y} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \ddot{y} = \omega_c \dot{z} \\ \dot{z} = -\omega_c y + C_2 \end{cases}$$

   On a initialement, $\dot{z}(t=0) = 0$ donc $C_2 = 0$,

$$\begin{cases} \ddot{y} = \omega_c \dot{z} \\ \dot{z} = -\omega_c y \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \ddot{y} = -\omega_c^2 y \\ \dot{z} = -\omega_c y \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \ddot{y} + \omega_c^2 y = 0 \\ \dot{z} = -\omega_c y \end{cases}$$

   Résolvons l'équation du second ordre vérifié par y,

$$\begin{cases} y(t) = A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t) \\ y(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = B\omega_c \sin(\omega_c t) \\ \dot{y}(t=0) = v_0 = B\omega_c \quad \rightarrow \quad B = \dfrac{v_0}{\omega_c} \end{cases}$$

   On obtient donc,

$$\boxed{y(t) = \frac{v_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t)}$$

b. Reprenons l'équation couplé,

$$\dot{z} = -\omega_c y = -v_0 \sin(\omega_c t) \quad \longrightarrow \quad z(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + C_3$$

Initialement on a, $z(t=0) = 0 = \dfrac{v_0}{\omega_c} + C_3$ donc $C_3 = -\dfrac{v_0}{\omega_c}$,

$$\boxed{z(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \left(\cos(\omega_c t) - 1\right)}$$

c. On a d'après les deux questions précédentes,

$$\begin{cases} y(t) = R \sin(\omega_c t) \\ z(t) = R(\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases} \qquad \text{avec} \quad R = \frac{v_0}{\omega_c}$$

Montrons que ces deux équations horaires vérifient l'équation d'un cercle centré en $(0, -R)$ et de rayon R dans le plan yOz,

$$(y(t) - 0)^2 + (z(t) + R)^2 = R^2 \sin^2(\omega_c t) + R^2 \cos^2(\omega_c t) = R^2(\sin^2(\omega_c t) + \cos^2(\omega_c t)) = R^2$$

$$\boxed{\text{Donc la trajectoire dans le plan } yOz \text{ est un cercle de centre } C(0, -R) \text{ et de rayon } R}$$

d. On a un mouvement **hélicoïdal** dans la direction Ox.