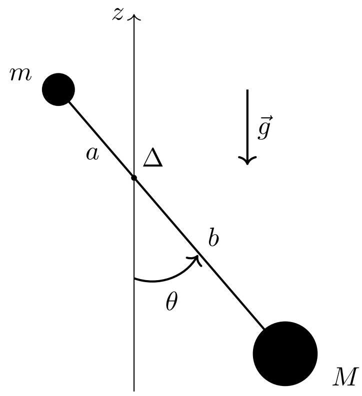
Pendule pesant à deux masses

On considère le pendule ci-dessous constitué de deux boules de masses respectives m et M. On néglige le moment d'inertie de la barre qui les relie.



La masse m est située à la distance a de l'axe de rotation Δ, et la masse M à une distance b.

La liaison pivot qui permet au système d'avoir le degré de liberté de rotation autour de l'axe Δ est supposée parfaite.

On lâche l'ensemble sans vitesse initiale depuis un angle θ_0.

1. En appliquant le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Δ, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
2. Établir l'intégrale première du mouvement en intégrant l'expression précédente et montrer qu'elle s'écrit,
$$\frac{1}{2}(Mb^2 + ma^2)\dot{\theta}^2 - (Mb - ma)g\cos(\theta) = -(Mb - ma)g\cos(\theta_0)$$
Interpréter chacun des termes de cette expression.
3. Rechercher les positions d'équilibre et étudier leur stabilité. Représenter l'allure des deux profils d'énergie potentielle possibles. A quelle condition le système se comporte-t-il comme un oscillateur autour de la position $\theta = 0$?
4. Dans ce cas, établir l'expression de la période des petites oscillations du pendule ainsi que la solution $\theta(t)$ de l'équation du mouvement.
5. On se place toujours dans le cas de la question 4, et dans le cas de petites oscillations. En réalité, la liaison pivot n'est pas parfaite : l'axe exerce des actions de frottement dont le couple Γ_f s'écrit,
$$\Gamma_f = -h\dot{\theta}$$
où h est une constante numérique. Établir la nouvelle équation du mouvement. A quelle condition sur h obtient-on un régime pseudo-périodique ?
6. Établir l'expression complète de la solution $\theta(t)$. Tracer l'allure de $\theta(t)$.