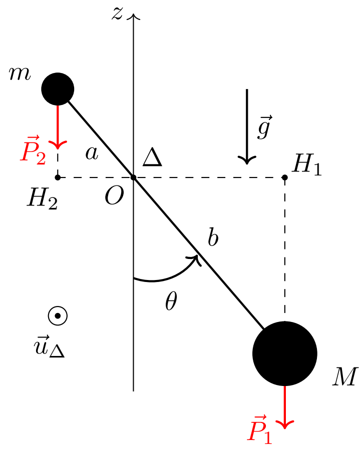
Pendule pesant à deux masses

1. On fait un schéma du problème physique,



En utilisant le bras de levier $d = OH_1$, où H_1 est le projeté orthogonal de O sur la droite d'action de la force $\vec{P}_1$, ainsi que la règle de la main droite on a,

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P}_1) = -Mbg\sin(\theta)\vec{u}_\Delta$$

Ainsi en projetant sur l'axe $\vec{u}_\Delta$, on obtient,

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_1) = -Mbg\sin(\theta)$$

De même avec l'autre, ce qui nous permet d'obtenir ces deux moments par rapport à l'axe Δ,

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_1) = -Mbg\sin(\theta) \\ \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_2) = mag\sin(\theta) \end{cases}$$

On peut maintenant appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ,

$$J_\Delta\ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) = (ma - Mb)g\sin(\theta)$$

De plus on a,

$$J_\Delta = \sum_i (m_i r_i^2) = ma^2 + Mb^2$$

Donc finalement on obtient l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$,

$$\boxed{\ddot{\theta}(t)(ma^2 + Mb^2) - (ma - Mb)g\sin(\theta(t)) = 0}$$

2. D'après la question précédente on a en la multipliant par $\dot{\theta}$,

$$\dot{\theta}\ddot{\theta}(ma^2 + Mb^2) - (ma - Mb)g\sin(\theta)\dot{\theta} = 0$$

On peut donc intégrer à une constante près,

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2(ma^2 + Mb^2) + (ma - Mb)g\cos(\theta) = C^{\text{te}}$$

Pour déterminer la constante utilisons les conditions initiales, à $t = 0$ on a $\theta = \theta_0$

$$C^{\text{te}} = (ma - Mb)g\cos(\theta_0)$$

Finalement on obtient l'intégrale première du mouvement donnée par l'énoncé,

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{2}\dot{\theta}^2(ma^2 + Mb^2)}_{\text{énergie cinétique}} - \underbrace{(Mb - ma)g\cos(\theta)}_{\text{énergie potentielle}} = \underbrace{-(Mb - ma)g\cos(\theta_0)}_{\text{énergie potentielle initiale}}}$$

3. On a donc comme expression de l'énergie potentielle,

$$Ep = -(Mb - ma)g\cos(\theta)$$

Étudions maintenant les postions d'équilibre,

$$\frac{dEp}{d\theta} = 0 \quad \longrightarrow \quad (Mb - ma)g\sin(\theta) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases} \quad (\text{mod } 2\pi)$$

Étudions maintenant la stabilité de ces positions d'équilibre,

$$\frac{d^2Ep}{d\theta} = (Mb - ma)g\cos(\theta)$$

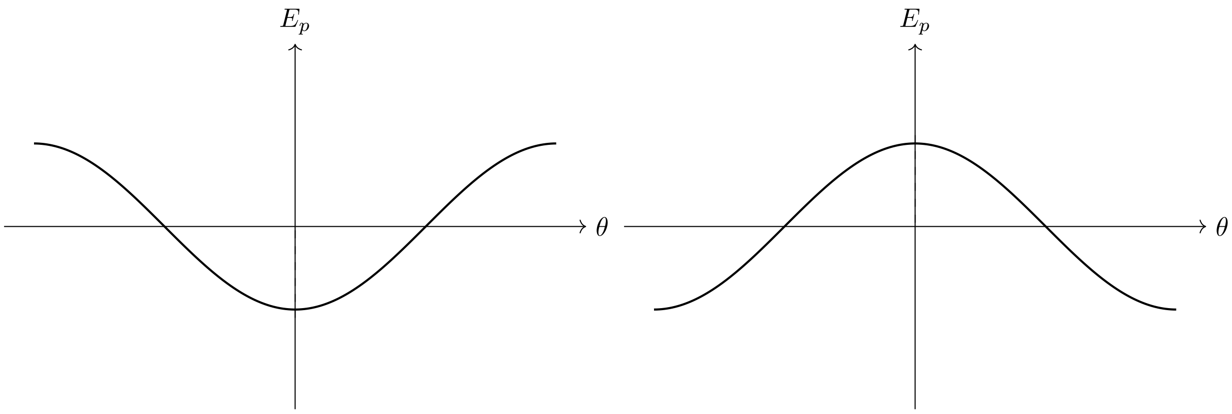
Évaluons maintenant en $\theta = 0$,

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = (Mb - ma)g \qquad \longrightarrow \qquad \begin{cases} \text{si } Mb > ma : \dfrac{d^2E_p}{d\theta^2} > 0 \Rightarrow \text{ équilibre stable} \\ \text{si } Mb < ma : \dfrac{d^2E_p}{d\theta^2} < 0 \Rightarrow \text{ équilibre instable} \end{cases}$$

Évaluons maintenant en $\theta = \pi$,

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pi} = -(Mb - ma)g \qquad \longrightarrow \qquad \begin{cases} \text{si } Mb > ma : \dfrac{d^2E_p}{d\theta^2} < 0 \Rightarrow \text{ équilibre instable} \\ \text{si } Mb < ma : \dfrac{d^2E_p}{d\theta^2} > 0 \Rightarrow \text{ équilibre stable} \end{cases}$$

Voici l'allure des deux profils d'énergie potentielle possibles,



Le système se comporte comme un oscillateur harmonique autour de la position $\theta = 0$ lorsque $Mb > ma$.

4. Reprenons l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en considérant des petites oscillations, soit $\sin(\theta) \simeq \theta$,

$$\ddot{\theta}(Mb^2 + ma^2) + (Mb - ma)g\theta = 0$$

Arrangeons l'équation et mettons la sous forme canonique,

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{Mb - ma}{Mb^2 + ma^2}\right) g\theta = 0 \quad \longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{(Mb - ma)g}{Mb^2 + ma^2}}$$

Or on sait que,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{(Mb - ma)g}{Mb^2 + ma^2}}$$

Ainsi on a,

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{Mb^2 + ma^2}{(Mb - ma)g}}}$$

Maintenant résolvons l'équation différentielle du second ordre avec des solutions de la forme,

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \qquad \text{avec } A \text{ et } B \text{ des constantes}$$

De plus en dérivant on a,

$$\dot{\theta}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

Utilisons les conditions initiales pour déterminer les constantes A et B,

$$\begin{cases} \theta(t = 0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(t = 0) = 0 \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{cases} A = \theta_0 \\ B\omega_0 = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0 \end{cases}$$

Finalement on obtient,

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$$

5. On doit ajouter le couple de force à l'équation, par ailleurs on est toujours dans le cas des petites oscillations, on a donc,

$$(Mb^2 + ma^2)\ddot{\theta} + (Mb - ma)g\theta + h\dot{\theta} = 0$$

Finalement on obtient sous forme canonique,

$$\boxed{\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad \text{avec} \quad \lambda = \frac{h}{2(Mb^2 + ma^2)} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{(Mb - ma)g}{Mb^2 + ma^2}}}$$

En passant par l'équation caractéristique, on obtient le discriminant réduit que l'on étudiera,

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad \delta = \lambda^2 - \omega_0^2$$

On sait qu'on a un régime pseudo-périodique lorsque,

$$\delta < 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda < \omega_0$$

Ainsi on obtient la condition sur h pour avoir un régime pseudo-périodique,

$$\boxed{h < 2\sqrt{(Mb - ma)(Mb^2 + ma^2)g}}$$

6. D'après l'étude précédente on a pour les racines,

$$r = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Ainsi la solution $\theta(t)$ sera de la forme,

$$\theta(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) \qquad \text{avec} \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

De plus en dérivant on a,

$$\dot{\theta}(t) = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) + \mathrm{e}^{-\lambda t}(-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t))$$

Les conditions initiales nous donnes,

$$\begin{cases} \theta(t=0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(t=0) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A = \theta_0 \\ -\lambda A + B\Omega = 0 \quad \rightarrow \quad B = \lambda\dfrac{\theta_0}{\Omega} \end{cases}$$

Finalement on obtient,

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}\left[\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\sin(\Omega t)\right] \qquad \text{avec} \quad \lambda = \frac{h}{2(Mb^2 + ma^2)} \quad \text{et} \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

Traçons maintenant l'allure de $\theta(t)$,