Écoulement de Poiseuille plan

1. On suppose initialement que le champ de vitesse et de pression s'écrivent sous la forme,

$$\vec{v}(M,t) = v_x(x,y,z,t)\,\vec{e}_x \qquad \text{et} \qquad P(M,t) = P(x,y,z,t)$$

Le régime étant permanent, le champ de vitesse et de pression sont indépendant du temps, ce qui conduit à,

$$\vec{v}(M) = v_x(x,y,z)\,\vec{e}_x \qquad \text{et} \qquad P(M) = P(x,y,z)$$

Par ailleurs, les plans étant supposés infinis suivant la direction Oy, le système est invariant par translation selon cette direction. Le champ de vitesse et de pression est donc indépendant de la variable y, d'où,

$$\vec{v}(M) = v_x(x,z)\,\vec{e}_x \qquad \text{et} \qquad P(M) = P(x,z)$$

Enfin, le fluide étant incompressible, le champ de vitesse vérifie la condition de conservation de la masse,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Comme $\vec{v}$ ne possède qu'une composante selon $\vec{e}_x$, on obtient,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Ainsi, la composante v_x ne dépend pas de la variable x, et le champ de vitesse s'écrit finalement,

$$\boxed{\vec{v}(M) = v_x(z)\,\vec{e}_x}$$

Écrivons maintenant l'équation de Navier–Stokes et adaptons-la à l'écoulement étudié,

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}$$

Le régime étant permanent, le terme $\partial\vec{v}/\partial t$ est nul. De plus, la pesanteur est négligée devant les autres effets. L'équation se réduit alors à,

$$\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}P + \eta\Delta\vec{v}$$

Étudions à présent le terme convectif. En utilisant l'expression du champ de vitesse, on obtient,

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = v_x(z)\,\frac{\partial}{\partial x}\big(v_x(z)\,\vec{e}_x\big)$$

Comme v_x ne dépend pas de la variable x, ce terme est nul,

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \vec{0}$$

Enfin, calculons le terme diffusif. Le laplacien vectoriel s'écrit composante par composante. Comme le champ de vitesse ne possède qu'une composante selon $\vec{e}_x$ et que celle-ci ne dépend que de z, on a,

$$\Delta\vec{v} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\vec{e}_x$$

Finalement on obtient,

$$\boxed{\vec{\nabla}P = \frac{d^2 v_x}{dz^2}\vec{e}_x}$$

2. La projection de l'équation précédente selon z donne :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

Nous pouvons donc dire que le champ de pression ne dépend pas de z, de ce fait on a,

$$P(M) = P(x)$$

L'équation précédente peut donc s'écrire sous la forme suivante projeté selon l'axe Ox,

$$\frac{dP}{dx} = \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2}$$

Comme les deux membres de cette équations sont des fonctions de variables indépendantes, nous en déduisons,

$$\frac{dP}{dx} = \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2} = K$$

On intègre alors l'équation différentielle par rapport à la variable z,

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} = \frac{K}{\eta}$$

Une première intégration donne,

$$\frac{dv_x}{dz} = \frac{K}{\eta} z + C_1$$

Une seconde intégration conduit à,

$$v_x(z) = \frac{K}{2\eta} z^2 + C_1 z + C_2$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des conditions aux limites cinématique. Le fluide adhère aux parois solides, ce qui impose,

$$\begin{cases} v_x(a) = 0 \\ v_x(-a) = 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} v_x(a) = \frac{K}{2\eta} a^2 + C_1 a + C_2 = 0 \quad (1) \\ v_x(-a) = \frac{K}{2\eta} a^2 - C_1 a + C_2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

En additionnant (1) et (2) on obtient,

$$\frac{K}{\eta} a^2 = -2C_2 \quad \longrightarrow \quad C_2 = -\frac{K}{2\eta} a^2$$

En soustrayant (1) et (2) on obtient quant alors,

$$2C_1 a = 0 \quad \longrightarrow \quad C_1 = 0$$

En reportant les valeurs des constantes d'intégration dans l'expression de $v_x(z)$, on obtient,

$$v_x(z) = \frac{K}{2\eta} \left(z^2 - a^2\right)$$

Ainsi, le profil de vitesse s'écrit,

$$v_x(z) = \frac{K}{2\eta} \left(z^2 - a^2\right)$$

La vitesse est maximale au centre de l'écoulement, pour $z = 0$ et vaut,

$$v_0 = -\frac{K}{2\eta} a^2$$

Soit finalement,

$$\boxed{v_x(z) = v_0\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)}$$

Déterminons maintenant le champ de pression, on a,

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{2\eta v_0}{a^2}$$

En intégrant par rapport à la variable x, on obtient,

$$P(x) = -\frac{2\eta v_0}{a^2}x + C_3$$

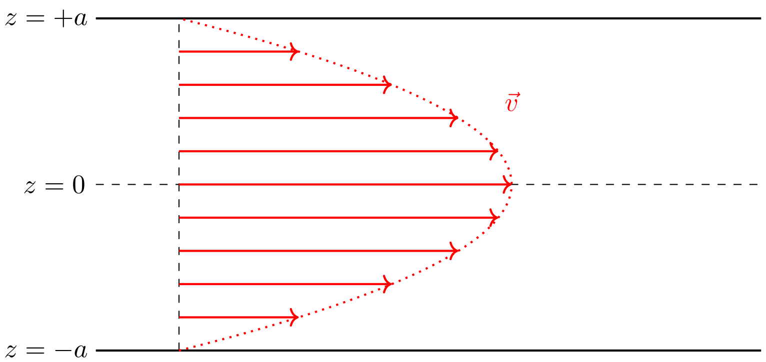
Avec la condition en $x = 0$ donne,

$$P(x = 0) = P_0 \quad \longrightarrow \quad P_0 = C_3$$

On en déduit finalement que le champ de pression s'écrit

$$\boxed{P(x) = P_0 - \frac{2\eta v_0}{a^2}x}$$

3. On représente le profil du champ de vitesse,



4. Déterminons si l'écoulement est rotationnel ou non, pour cela calculons,

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right]\vec{e}_x + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]\vec{e}_y + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right]\vec{e}_z$$

Comme v_x dépend uniquement de la variable z on obtient,

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \frac{dv_x}{dz}\vec{e}_y$$

Passons maintenant au calcul du rotationnel,

$$\frac{v_x}{dz} = \frac{d}{dz}\left[v_0\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)\right] = -\frac{2v_0}{a^2}z$$

Finalement on obtient,

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = -\frac{2v_0}{a^2}z\,\vec{e}_y \neq \vec{0}}$$

L'écoulement est donc **rotationnel**.

5. Utilisons la condition aux limites dynamique suivante, le force qu'exerce le fluide sur la plaque supérieure est donnée par la relation,

$$\vec{F}_{\text{fluide}\to\text{plaque}} = -\eta S \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_{z=a} \vec{e}_x$$

Soit finalement,

$$\boxed{\vec{F}_{\text{fluide}\to\text{plaque}} = \frac{2\eta S v_0}{a} \vec{e}_x}$$