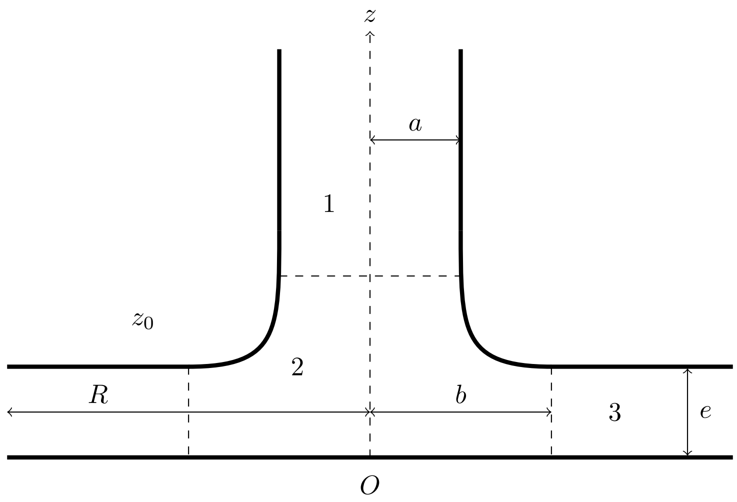
Écoulement sous une soufflante

On envisage l'écoulement permanent, incompressible, irrotationnel de l'air dans une canalisation à symétrie cylindrique autour de l'axe Oz.



On cherche un champ de vitesse dans les trois zones précisées sur le schéma sous la forme suivante :

- Zone 1 : $\vec{v}_1 = -v_0\vec{e}_z$
- Zone 2 : $\vec{v}_2 = Ar\vec{e}_r + Bz\vec{e}_z$
- Zone 3 : $\vec{v}_3 = v_r(r,z)\vec{e}_r$

On donne, pour un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = v_r(r,z)\vec{e}_r + v_z(r,z)\vec{e}_z$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta$$

1. Représenter qualitativement l'allure de quelques lignes de courant.
2. Exprimer le débit volumique à travers une section $z = C^{\text{te}}$ de la canalisation orienté dans le sens des lignes de courant, dans la zone 1, en fonction de v_0 et a.

   On s'intéresse à l'écoulement dans la zone 3.

3. a. Montrer que $v_r(r,z)$ ne dépend pas de z.

   b. Exprimer le débit volumique à travers une section $r = C^{\text{te}}$ de l'écoulement en fonction de e, $v_r(r)$ et r. En déduire l'expression de $v_r(r)$ dans cette zone en fonction de r, e, a et v_0.

   On s'intéresse à l'écoulement dans la zone 2.

4. a. Exprimer B en fonction de v_0 et z_0. Exprimer ensuite A en fonction de a, b, e et v_0.

   b. En utilisant une propriété de l'écoulement, établir une relation entre A et B.

   c. En déduire l'expression de b en fonction de z_0, a et e dans ce modèle.