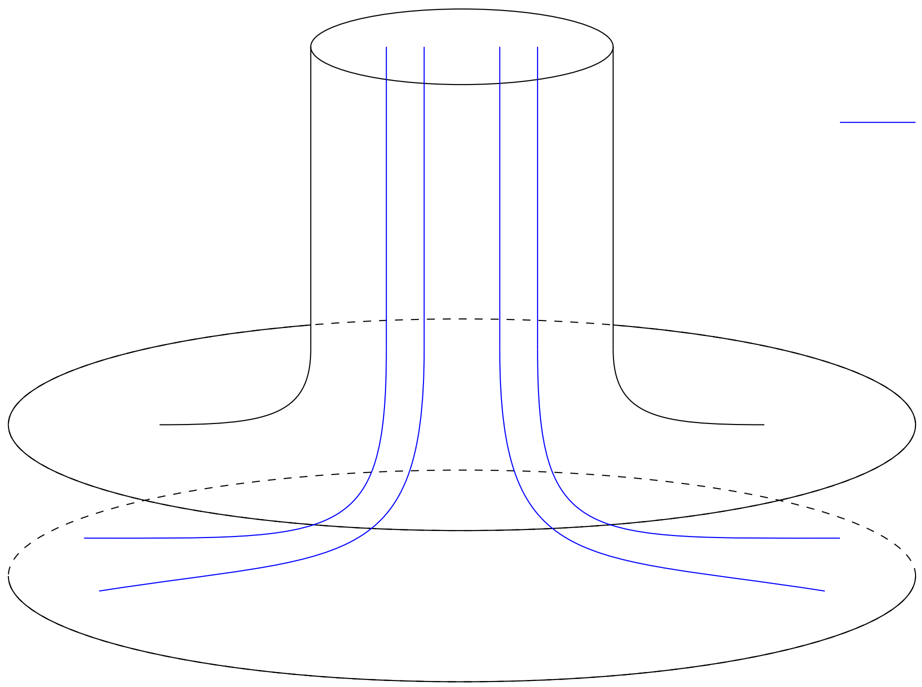
Écoulement sous une soufflante

1. Représentons l'allure de quelques lignes dans la soufflante.



2. Exprimons le débit volumique dans la zone 1,

$$D_{v,1} = \iint_{S_1} \vec{v}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_1} v_0 dS = v_0 S_1$$

   Soit en remplaçant S_1 par sa valeur,

$$\boxed{D_{v,1} = \pi a^2 v_0}$$

3. a. D'après l'énoncé on a un écoulement irrotationnel autrement dit,

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$$

   Utilisons maintenant ce résultat avec l'expression du rotationnel pour ce champ de vitesse,

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}_3 = \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta = \vec{0}$$

   Or dans la zone 3, $\vec{v}_3$ n'a pas de composante selon $\vec{e}_z$, on se retrouve alors avec,

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = 0$$

   On a bien v_r indépendante de la variable z et donc,

$$\boxed{\vec{v}_3 = v_r(r)\vec{e}_r}$$

b. Exprimons le débit volumique dans la zone 3,

$$D_{v,3} = \iint_{S_3} \vec{v}_3 \cdot d\vec{S} = \iint_{S_3} v_r(r) dS = \iint_{S_3} v_r(r) r d\theta dz = v_r(r) r \int_0^e dz \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r e v_r(r)$$

On a donc,

$$D_{v,3} = 2\pi r e v_r(r)$$

Comme l'écoulement est incompressible, le débit volumique est conservé. On obtient par conséquent la relation suivante,

$$D_{v,1} = D_{v,3} \quad \longrightarrow \quad \pi a^2 v_0 = 2\pi r e v_r(r)$$

Soit finalement,

$$\boxed{v_r(r) = v_0 \frac{a^2}{2er}}$$

4. a. D'après l'énoncé on a,

$$\vec{v}_2 = Ar\vec{e}_r + Bz\vec{e}_z$$

- On sait qu'on a continuité de la composante normale du champ de vitesse à l'interface $z = z_0$ entre la zone 1 et 2, par conséquent,

$$v_{1,z} = v_{2,z} \quad \longrightarrow \quad -v_0 = Bz_0$$

Soit,

$$\boxed{B = -\frac{v_0}{z_0}}$$

- On sait qu'on a aussi continuité de la composante normale du champ de vitesse à l'interface $r = b$ entre la zone 2 et 3, on obtient donc la relation suivante,

$$v_{2,r} = v_{3,r} \quad \longrightarrow \quad Ab = v_r(b) \quad \longrightarrow \quad Ab = v_0 \frac{a^2}{2eb}$$

Soit,

$$\boxed{A = v_0 \frac{a^2}{2eb^2}}$$

b. D'après l'énoncé on a un écoulement incompressible autrement dit,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

On applique donc à $\vec{v}_2$ afin d'obtenir une relation entre B et A,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial r A r}{\partial r} + \frac{\partial B z}{\partial z} = 0 \quad \longrightarrow \quad 2A + B = 0$$

On obtient alors,

$$\boxed{B = -2A}$$

c. En remplaçant par dans l'équation précédemment trouvée les formules de A et B on a,

$$\frac{-v_0}{z_0} = -\frac{2v_0 a^2}{2eb^2}$$

Soit,

$$\boxed{b = \sqrt{\frac{z_0 a^2}{e}}}$$