

Formation d'une étoile

1. On a d'après l'énoncé,

$$\overrightarrow{OM} = c(t)\overrightarrow{OM}_0$$

Donc d'après l'expression de la vitesse en fonction de la position on a,

$$\vec{v}(M, t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{c}(t)\overrightarrow{OM}_0 = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)}\overrightarrow{OM}$$

Finalement on obtient bien,

$$\boxed{\vec{v}(M, t) = H(t)\overrightarrow{OM} \quad \text{avec} \quad H(t) = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)}}$$

2. • Comme la vitesse dépend de $H(t)$ qui lui dépend de t le système ne peut pas être indépendant du temps. Donc l'écoulement est **non stationnaire**.

• Calculons la divergence de la vitesse à l'aide de l'expression donnée par l'énoncé,

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^3 H(t))}{\partial r} = 3H(t) \neq 0$$

L'écoulement est donc **compressible**.

• Enfin comme la vitesse est supposée radiale et ne dépendant que de la coordonnée sphérique radiale r et du temps t , on a,

$$\overrightarrow{rot} \vec{v} = \vec{0}$$

L'écoulement est donc **irrotationnel**.

3. Calculons le champ des accélérations,

$$\begin{aligned} \vec{a}(M, t) &= \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial t} \vec{e}_r + \left[\begin{pmatrix} v_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \right] \cdot (v_r(r, t) \vec{e}_r) \\ &= \dot{H}(t) r \vec{e}_r + v_r \frac{\partial v_r(r, t)}{\partial r} \vec{e}_r = \dot{H}(t) r \vec{e}_r + H^2(t) r \vec{e}_r \end{aligned}$$

Finalement le champ des accélérations s'écrit,

$$\boxed{\vec{a}(M, t) = r \left(\dot{H}(t) + H^2(t) \right) \vec{e}_r}$$

4. On a un fluide supposé homogène donc il y a conservation de la masse au cours du temps,

$$m(t=0) = m(t) \quad \longrightarrow \quad \mu_0 V_0 = \mu(t) V(t)$$

On obtient donc la relation suivante,

$$\mu_0 \frac{4}{3} \pi O M_0^3 = \mu(t) \frac{4}{3} \pi O M^3 \quad \longrightarrow \quad \mu(t) = \mu_0 \left(\frac{O M_0}{O M} \right)^3$$

Or, en norme on a,

$$O M = c(t) O M_0$$

On obtient donc,

$$\boxed{\mu(t) = \frac{\mu_0}{c(t)^3}}$$