

Temps de vidange d'un réservoir

1. Exprimons le débit volumique au point A et B ,

$$Q_A = SV(t) \quad \text{et} \quad Q_B = sv(t)$$

Le fluide étant incompressible, le débit volumique est conservé entre la surface libre du réservoir et l'orifice de sortie cela nous donne l'égalité suivante,

$$Q_A = Q_B$$

On obtient donc la relation suivante,

$$\boxed{SV(t) = sv(t)}$$

2. On suppose que l'écoulement est quasi-stationnaire dans le réservoir. Cette hypothèse permet d'appliquer le théorème de Bernoulli entre le point A et le point B ,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{constante}$$

Comme on est à la pression atmosphérique aux points A et B , les termes de pression se compensent. Les altitudes sont $z_A = h(t)$ et $z_B = 0$. Les vitesses sont respectivement $V(t)$ et $v(t)$. On obtient alors,

$$\frac{1}{2}V(t)^2 + gh(t) = \frac{1}{2}v(t)^2$$

Or à la surface libre on $V(t) \ll v(t)$ donc on peut simplifier encore l'équation. On a donc,

$$\frac{1}{2}v(t)^2 = gh(t)$$

Finalement on obtient,

$$\boxed{v(t) = \sqrt{2gh(t)}}$$

3. Pour une hauteur d'eau $h = 1 \text{ m}$ et $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, on obtient

$$\boxed{v \approx 4,43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

4. Le volume d'eau contenu dans le réservoir est donné par,

$$V(t) = Sh(t)$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient,

$$\frac{dV}{dt} = S \frac{dh}{dt}$$

Or le débit volumique sortant par l'orifice s'exprime de la façon suivante,

$$Q(t) = sv(t)$$

Comme on vide le réservoir le débit volumique est égal à l'opposé de la dérivée du volume d'eau par rapport au temps.

$$\frac{dV}{dt} = -Q(t)$$

On obtient alors,

$$S \frac{dh}{dt} = -sv(t)$$

En utilisant l'expression de $v(t)$ obtenue précédemment, il vient,

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{s}{S} \sqrt{2gh(t)}}$$

Résolvons maintenant cette équation différentielle et commençons par séparer les variables,

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s}{S} \sqrt{2g} dt$$

En intégrant, on obtient,

$$2\sqrt{h} = -\frac{s}{S} \sqrt{2g} t + C^{\text{te}}$$

La condition initiale $h(0) = h_0$ permet de déterminer la constante d'intégration,

$$C^{\text{te}} = 2\sqrt{h_0}$$

Ainsi, la hauteur d'eau s'écrit,

$$\boxed{h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{s}{2S} \sqrt{2g} t \right)^2}$$

5. Le réservoir est complètement vidé lorsque $h(\tau_v) = 0$. On obtient alors,

$$\sqrt{h_0} - \frac{s}{2S} \sqrt{2g} \tau_v = 0$$

Il en résulte,

$$\boxed{\tau_v = \frac{2S}{s} \sqrt{\frac{h_0}{2g}}}$$

Cette expression montre que le temps de vidange augmente lorsque la section du réservoir est grande, lorsque l'orifice est petit, ou lorsque la hauteur initiale d'eau est élevée.