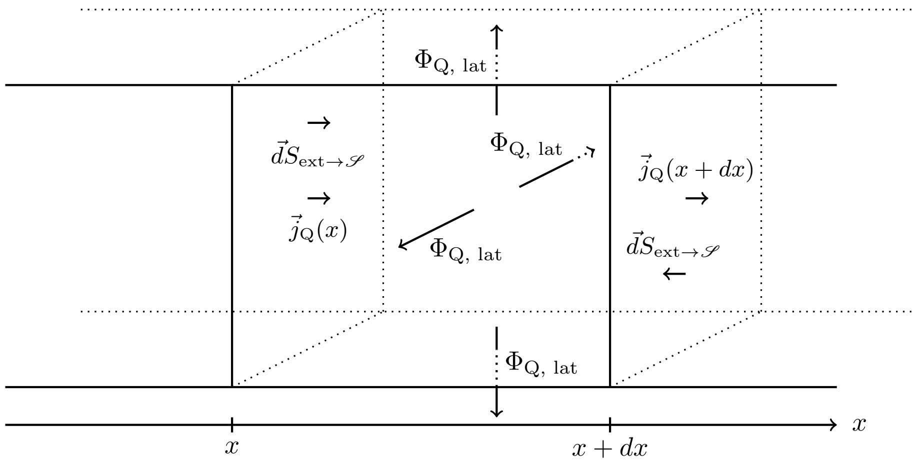
Ailette de refroidissement

1. On définit le système suivant : $\mathscr{S}$= {une tranche d'ailette comprise entre x et $x+dx$}



On fait un bilan d'énergie au système $\mathscr{S}$:

$$\underbrace{\cancel{\frac{d^2U}{dt}}}_{=\,0 \text{ régime permanent}} = \delta\Phi_{\text{ext}\to\mathscr{S}} + \overbrace{\cancel{\delta^2 Q_p}}^{=0 \text{ pas de terme de création}} + \underbrace{\cancel{\delta^2 W}}_{=0 \text{ solide incompressible}}$$

Ainsi l'équation se ramène à,

$$\delta\Phi_{\text{ext}\to\mathscr{S}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Phi_{\text{Q, entrant en } x} + \Phi_{\text{Q, entrant en } x\,+\,dx} + \Phi_{\text{Q, lat}} = 0$$

On a d'après l'énoncé,

$$\Phi_{\text{Q, lat}} = h(T(x) - T_A)dS \quad \text{avec} \quad dS = 2edx + 2bdx = 2(e+b)dx$$

Alors,

$$\iint_{\text{S entrant en } x} \vec{j}_Q(x)\,\vec{dS}_{\text{ext}\to\mathscr{S}} + \iint_{\text{S entrant en } x+dx} \vec{j}_Q(x+dx)\,\vec{dS}_{\text{ext}\to\mathscr{S}} - 2h(b+e)(T(x)-T_A)dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad j_x(x)be - j_x(x+dx)be - 2h(b+e)(T(x)-T_A)dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{j_x(x+dx) - j_x(x)}{dx} - 2h\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{b}\right)(T(x) - T_A) = 0$$

On obtient finalement,

$$\boxed{\frac{\partial j_x}{\partial x} + 2h\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{b}\right)(T(x) - T_A) = 0} \tag{1}$$

2. D'après la loi de de Fourier on a,

$$\vec{j_Q} = -\lambda\frac{dT}{dx}\vec{u}_x$$

On fait la projection de $\vec{j_Q}$ sur l'axe Ox,

$$j_x = -\lambda\frac{dT}{dx}$$

On remplace dans l'équation (1),

$$-\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2h\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{b}\right)(T(x) - T_A) = 0$$

On obtient donc l'équation différentielle suivante,

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{L^2}(T(x) - T_A) = 0 \quad \text{avec} \quad L = \sqrt{\frac{\lambda e b}{2h(e+b)}} \simeq 1,0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}$$

Remarque : Puisque le vecteur densité de flux thermique $\vec{j}_Q$ se dirige vers les zones de basse température (en opposition au gradient), le signe moins est nécessaire pour que l'équation reflète cette direction physique.

3. Résolvons l'équation différentielle suivante,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{T(x)}{L^2} = -\frac{T_A}{L^2}$$

La solution est de la forme,

$$T(x) = T_{\text{homogène}}(x) + T_{\text{particulière}}$$

Equation caractéristique,

$$r^2 = \frac{1}{L^2} \qquad \Longrightarrow \qquad r = \pm\frac{1}{L}$$

On trouve $T_{\text{particulière}}$ en prenant $T(x) = C^{\text{te}} \implies T_{\text{particulière}} = T_A$

Ainsi on a,

$$T(x) = \lambda e^{xr} + \mu e^{-xr} + T_A \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu = C^{\text{te}}$$

La température ne pouvant diverger lorsque $x \to +\infty$, on a nécessairement $\lambda = 0$.

La condition limite en O nous donne,

$$T(x=0) = T_M = \mu + T_A \implies \mu = T_M - T_A$$

Ainsi la solution de cette équation différentielle est,

$$\boxed{T(x) = T_A + (T_M - T_A)e^{-x/L}}$$

4. D'après la question précédente on a,

$$T(x) = T_A + (T_M - T_A)e^{-x/L}$$

Et d'après l'énoncé,

$$dP = h(T(x) - T_A)dS$$

Finalement on obtient,

$$\boxed{dP = h(T_M - T_A)e^{-x/L}dS}$$

5. On a, $dS = 2(e+b)dx$

   Intégrons dP entre 0 et x,

$$P = \int_0^x 2h(e+b)(T_M - T_A)e^{-x/L}dx = 2h(e+b)(T_M - T_A)\int_0^x e^{-x/L}dx$$

$$= 2h(e+b)(T_M - T_A)\left[-Le^{-x/L}\right]_0^x = 2hL(e+b)(T_M - T_A)\left(1 - e^{-x/L}\right)$$

   Ainsi en $x = c$ on a,

$$\boxed{P = 2hL(e+b)(T_M - T_A)\left(1 - e^{-c/L}\right) \simeq 12,5 \text{ W}}$$

6. On a d'après la question précédente,

$$P = 2hL(e+b)(T_M - T_A)\left(1 - e^{-x/L}\right)$$

   Donc, on en $x = 0$ on a,

$$\boxed{P' = 2hL(e+b)(T_M - T_A) \simeq 12,5 \text{ W}}$$

   Ainsi, une ailette de cette dimension permet d'évacuer presque la totalité de la puissance thermique transmise par le boîtier de l'appareil M à l'ailette. Donc, $\boxed{P' \simeq P}$.

7. D'après les résultats précédent pour un flux thermique de $0,9$ kW il faudra : $\boxed{N_{\text{ailettes}} = \dfrac{900}{12} = 72}$

8. Si la condition $L \ll c$ n'est plus vérifiée, le terme e^{xr} ne serait plus divergent, il faudrait alors tenir compte du terme en λ dans l'expression générale de $T(x) = \lambda e^{xr} + \mu e^{-xr} + T_A$.