

## Intérêt des caves enterrées

On cherche à évaluer l'impact des variations temporelles de températures au niveau du sol sur la température en profondeur dans le sous-sol.

On modélise les variations journalières de température d'amplitude  $\theta_0$  autour de la valeur moyenne  $T_0$  au niveau du sol par une fonction  $T(t)$  de la forme  $T(t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$ .

Le sous-sol est mobilisé comme un milieu semi-infini homogène de conductivité thermique  $\lambda$ , de masse volumique  $\mu$  et de capacité thermique massique  $c$ , toutes ces grandeurs étant supposées uniformes.

L'axe vertical. ( $Oz$ ) est **dirigé vers le bas**,  $O$  étant au niveau du sol ; on suppose le problème unidimensionnel et on pose  $T(z, t) = T_0 + \theta(z, t)$ .

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(z, t)$  et donner l'expression du coefficient de diffusion  $D$ .
2.
  - a. Compte-tenu de la forme de l'excitation thermique en surface, on cherche une solution de type sinusoïdale forcée de la forme  $\theta(z, t) = \xi(z) \cos(\omega t + \phi)$ . Commenter cette expression.
  - b. L'équation vérifiée par  $\theta(z, t)$  étant linéaire, et l'excitation en surface étant harmonique, on peut utiliser la représentation complexe pour résoudre le problème. On note alors  $\underline{\theta}(z, t) = \underline{\xi}(z)e^{j\omega t}$  la représentation complexe de  $\theta(z, t)$ .  
Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\underline{\xi}(z)$ . La résoudre sans chercher pour l'instant la constante d'intégration. On fera apparaître une longueur caractéristique  $\delta$  du problème.
  - c. En déduire l'expression de  $\theta(z, t)$  puis l'expression complète de  $T(z, t)$ . A  $t$  donné, tracer l'allure de  $T(z, t)$ , la commenter.
3. Déterminer l'ordre de grandeur de la profondeur de pénétration des oscillations thermiques dans le sol pour des variations journalières de température. On donne  $D = 5.10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  pour la diffusivité thermique du sol.
4. On envisage maintenant des variations annuelles de température. Déterminer à partir de quelle profondeur les variations annuelles de température, dont l'amplitude au niveau du sol est  $\theta_0 = -20 \text{ K}$ , donnent lieu à des variations de température d'amplitude inférieure à  $2 \text{ K}$ .