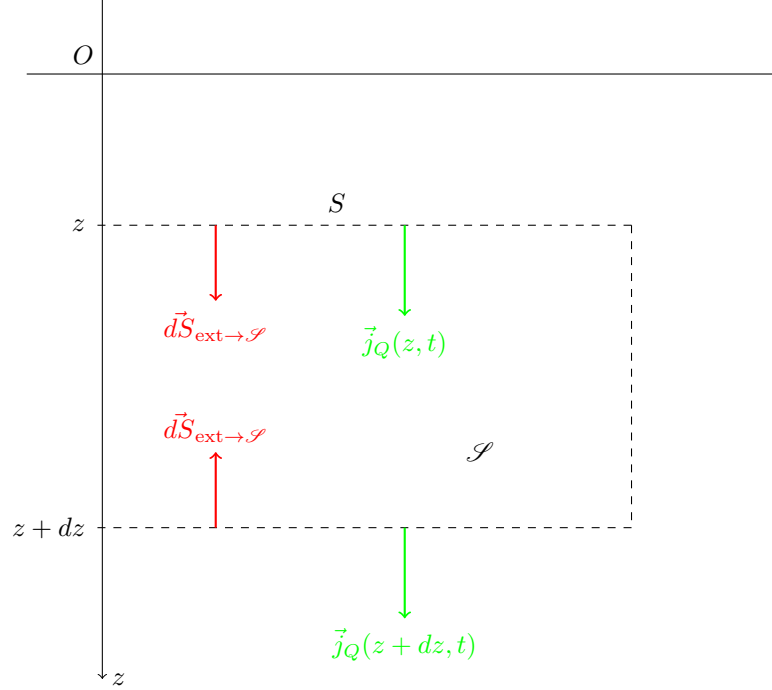


Intérêt des caves enterrées

1. Faisons une représentation du problème physique avec la description du système $\mathcal{S} = \{\text{tranche de sol de surface } S \text{ entre } z \text{ et } z + dz\}$.



À l'instant t , \mathcal{S} contient une énergie interne $\delta U(t)$. En faisant un bilan d'énergie au système \mathcal{S} entre t et $t + dt$,

$$d^2U = \delta^2Q + \delta^2W$$

Étant donné qu'on est dans un solide et qu'il n'y a pas de chaleur produite on a,

$$d^2U = \delta^2Q_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2U}{dt} = \delta\Phi_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}}$$

Exprimons le premier terme de l'équation,

$$d^2U = \delta U(t + dt) - \delta U(t)$$

Or on sait que,

$$\delta U(t) = \delta mu(z, t) = \rho d\tau c T(z, t)$$

Ainsi on obtient,

$$d^2U = \rho c \left(\frac{T(z, t + dt) - T(z, t)}{dt} \right) d\tau dt = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(z, t) d\tau dt$$

Soit,

$$\frac{d^2U}{dt} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(z, t) d\tau$$

Exprimons maintenant le second terme de l'équation,

$$\delta\Phi_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}} = \Phi_{\text{entrant en } z} + \Phi_{\text{entrant en } z + dz} = \iint_{S \text{ en } z} \vec{j}_Q(z, t) d\vec{S}_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}} + \iint_{S \text{ en } z + dz} \vec{j}_Q(z + dz, t) d\vec{S}_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}}$$

$$\rightarrow j_z(z, t)S - j_z(z + dz, t)S = - \left(\frac{j_z(z + dz, t) - j_z(z, t)}{dz} \right) S dz = - \frac{\partial j_z}{\partial z}(z, t) d\tau$$

Soit,

$$\delta\Phi_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}} = - \frac{\partial j_z}{\partial z}(z, t) d\tau$$

En utilisant la loi de Fourier on a,

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z \quad \rightarrow \quad j_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$$

En remplaçant dans l'équation précédente,

$$\delta\Phi_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}} = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) d\tau$$

Finalement on obtient dans un premier temps l'équation différentiel vérifiée par $T(z, t)$,

$$\frac{\partial T}{\partial t}(z, t) = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t) \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

En utilisant la relation $T(z, t) = T_0 + \theta(z, t)$ on obtient,

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t}(z, t) = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}(z, t) \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c}}$$

2. a. Comme l'équation de diffusion est linéaire et que l'excitation en surface est harmonique de pulsation ω on va donc chercher une solution de type sinusoïdale forcée comme donnée par l'énoncé,

$$\theta(z, t) = \xi(z) \cos(\omega t + \phi)$$

Avec ξ l'**amplitude** (qui va décroître lorsque z augmente et inversement) et ϕ le **déphasage** (physiquement c'est la durée de diffusion sur la profondeur z)

- b. D'après l'énoncé on peut utiliser la représentation complexe pour résoudre le problème en utilisant,

$$\underline{\theta}(z, t) = \underline{\xi}(z) e^{j\omega t}$$

Soit en injectant dans l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\theta}(z, t)$ on a pour tout t ,

$$j\omega \underline{\xi}(z) e^{j\omega t} = D \frac{d^2 \underline{\xi}}{dz^2}(z) e^{j\omega t}$$

Finalement on obtient,

$$\boxed{\frac{d^2 \underline{\xi}}{dz^2}(z) = j \frac{\omega}{D} \underline{\xi}(z)}$$

Passons maintenant à la résolution de l'équation différentielle, on a l'équation caractéristique suivante,

$$r^2 = j \frac{\omega}{D} = e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{D} \quad \rightarrow \quad r = \pm e^{j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\omega}{D}} = \pm \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \sqrt{\frac{\omega}{D}} = \pm (1 + j) \sqrt{\frac{\omega}{2D}}$$

On a donc,

$$r = \pm \frac{1+j}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$$

Comme on a une équation du second ordre, à coefficient constants, homogène on a des solutions de la forme,

$$\underline{\xi}(z) = Ae^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} + Be^{(1+j)\frac{z}{\delta}}$$

Or comme la fonction $\theta(z, t)$ ne diverge pas la deuxième partie de la solution n'est physiquement pas recevable on a donc $B = 0$. Ainsi la solution de l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\xi}(z)$ est de la forme,

$$\underline{\xi}(z) = Ae^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}}$$

c. En reprenant la notation sous forme complexe de $\theta(z, t)$ on obtient,

$$\underline{\theta}(z, t) = \underline{\xi}(z)e^{j\omega t} = Ae^{-\frac{z}{\delta}} e^{-j\frac{z}{\delta}} e^{j\omega t} = Ae^{-\frac{z}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{z}{\delta})}$$

Or, comme $\theta(z, t) = \Re(\underline{\theta}(z, t))$, on obtient

$$\theta(z, t) = Ae^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

On va reprendre cette fois l'expression $T(z, t)$,

$$T(z, t) = T_0 + \theta(z, t) = T_0 + Ae^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

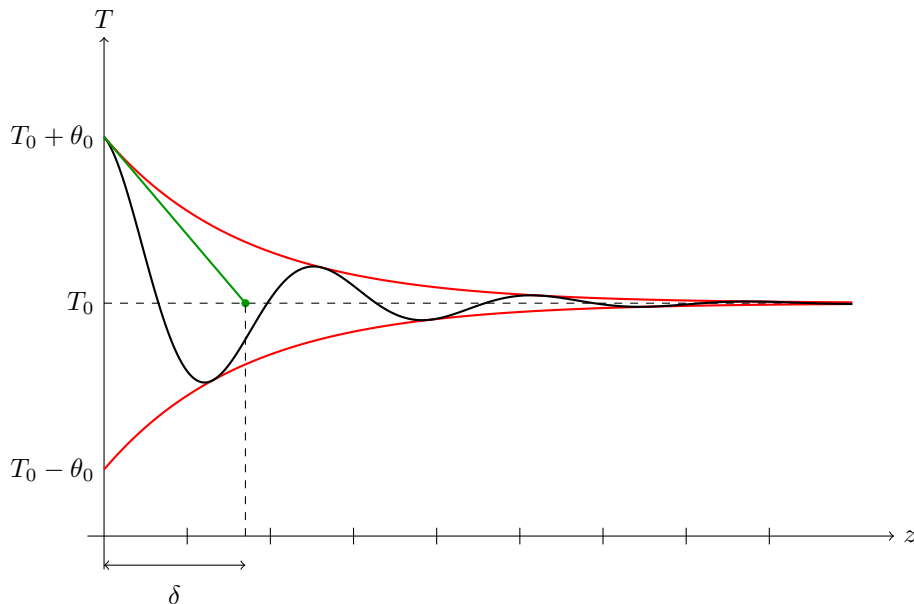
Or on sait qu'à $z = 0$ on a pour tout t ,

$$T(z = 0, t) = T(t) \quad \longrightarrow \quad T_0 + A \cos(\omega t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t) \quad \longrightarrow \quad A = \theta_0$$

Finalement,

$$T(z, t) = T_0 + \theta_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

Les variations de température se propagent dans le sol avec une amplitude $A(z) = \theta_0 e^{-z/\delta}$ qui décroît exponentiellement sur la distance caractéristique δ .



3. On a d'après la question 2b.,

$$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \sqrt{\frac{2D}{2\pi f}} = \sqrt{\frac{DT}{\pi}}$$

L'application numérique pour 1 jours, soit 86 400 s donne,

$$\boxed{\delta = 11,7 \text{ cm}}$$

4. En reprenant l'expression de l'amplitude globale $A(z) = \theta_0 e^{-\frac{z}{\delta}}$, on cherche à déterminer un z_0 tel que,

$$A(z_0) = \frac{\theta_0}{10} = \theta_0 e^{-\frac{z_0}{\delta}} \quad \longrightarrow \quad e^{\frac{z_0}{\delta}} = 10 \quad \longrightarrow \quad z_0 = \delta \ln(10)$$

Autrement dit,

$$\boxed{z_0 = \sqrt{\frac{DT}{\pi}} \ln(10)}$$

Pour l'application numérique on prend $T=1 \text{ an} = \pi \cdot 10^7 \text{ s}$,

$$\boxed{z_0 = 5,1 \text{ m}}$$