

Détermination expérimentale de la conductivité thermique du cuivre

- Le gradient se déplace en direction des régions froides vers les régions chaudes, soit dans ce cas dans le sens opposé à z .
 - La loi de Fourier s'écrit,

$$\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\nabla} T$$

Avec \vec{j}_Q , le vecteur densité de courant thermique exprimé en $W \cdot m^{-2}$, λ la conductivité thermique exprimée en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ et enfin T la température en K.

- Exprimons la puissance fournie par l'alimentation continue à la résistance chauffante,

$$\Phi_Q = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = j_Q(z)S = j_Q(z)\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Or la puissance fournie est égale au flux thermique entrant,

$$P_J = \Phi_Q$$

Soit,

$$P_J = j_Q(z)\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

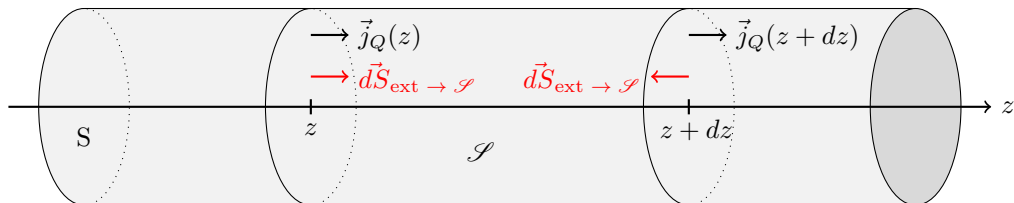
- On sait que dans une résistance on a,

$$P_J = RI^2 = \frac{U_0^2}{R}$$

Donc comme la puissance est supposée intégralement à la barre dans la partie $z > 0$ on a,

$$j_Q(z=0) = \frac{4U_0^2}{R\pi d^2}$$

- Faisons un schéma du problème étudié,



Pour montrer que \vec{j}_Q est uniforme dans la barre on fait un bilan local d'énergie à $\mathcal{S} = \{\text{Tranche de la barre compris entre } z \text{ et } z + dz\}$,

$$\frac{dU}{dt} = \delta\Phi_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}} + \delta P$$

Or on a pas de production d'énergie et on est en régime stationnaire donc,

$$\delta\Phi_{\text{ext} \rightarrow \mathcal{S}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Phi_{\text{entrant en } z} = \Phi_{\text{sortant en } z+dz}$$

Or on sait que,

$$\Phi_Q = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = j_Q(z)S$$

Ainsi on a,

$$\Phi_{\text{entrant en } z} = \Phi_{\text{sortant en } z+dz} \longrightarrow j_Q(z)S = j_Q(z+dz)S \longrightarrow j_Q(z) = j_Q(z+dz)$$

Ce qui montre bien que \vec{j}_Q est uniforme dans la barre.

- On sait d'après la loi de Fourier que,

$$j_Q(z) = -\lambda \frac{dT}{dz}$$

De plus comme \vec{j}_Q est uniforme dans la barre on a que,

$$j_Q(z) = j_Q(z=0)$$

On obtient donc l'équation différentielle vérifiée par $T(z)$ suivante,

$$\boxed{\frac{dT}{dz} = -\frac{4U_0^2}{\pi d^2 R \lambda}}$$

4. On a une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $T(z)$, en primitivant on a,

$$T(z) = -\frac{4U_0^2}{\pi d^2 R \lambda} z + A$$

On sait qu'on a une condition limite en $z = L$,

$$T(L) = -\frac{4U_0^2}{\pi d^2 R \lambda} L + A \longrightarrow A = T(L) + \frac{4U_0^2}{\pi d^2 R \lambda} L$$

Soit finalement,

$$\boxed{T(z) = T(L) + \frac{4U_0^2}{\pi d^2 R \lambda} (L - z)}$$

5. Déterminons maintenant l'expression et la valeur de la conductivité thermique du cuivre λ à l'aide des deux valeurs de température en fonction de leur position sur l'axe z ,

$$T_1 = T(L) + \frac{4U_0^2}{\pi d^2 R \lambda} (L - z_1) \quad \text{et} \quad T_2 = T(L) + \frac{4U_0^2}{\pi d^2 R \lambda} (L - z_2)$$

En faisant la différence des deux équations on obtient,

$$T_1 - T_2 = \frac{4U_0^2}{\pi d^2 R \lambda} (z_2 - z_1)$$

Soit en isolant λ ,

$$\boxed{\lambda = \frac{4U_0^2}{\pi d^2 R} \left(\frac{z_2 - z_1}{T_1 - T_2} \right)}$$

L'application numérique donne,

$$\boxed{\lambda = 4,07 \cdot 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}$$