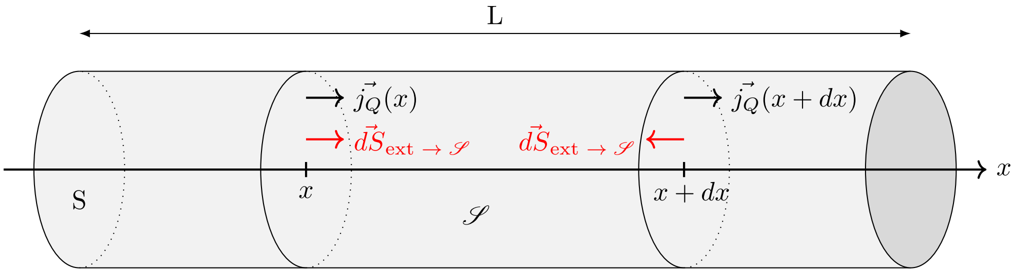
Corrigé - Conductivité thermique dépendant de la température

Schéma d'une barre cylindrique, on définit le système $\mathscr{S}$ = {tranche d'une barre cylindrique comprise entre x et $x + dx$}



1. On fait un bilan local d'enthalpie à $\mathscr{S}$:

$$\mathrm{d}^2H = \mathrm{d}^2U + \underbrace{p\mathrm{d}^2V + V\mathrm{d}^2p}_{=0 \text{ car } V,\, p = C^{\text{te}}} \iff \mathrm{d}^2U = \delta^2Q_{\text{ext}\to\mathscr{S}} + \underbrace{\delta^2Q_p}_{=0} \xrightarrow{\times\frac{1}{\mathrm{d}t}} \underbrace{\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t}}_{=0\,\text{RS}} = \delta\Phi_{\text{ext}\to\mathscr{S}} \iff \delta\Phi_{\text{ext}\to\mathscr{S}} = 0$$

Déterminons l'expression de $\delta\Phi_{\text{ext}\to\mathscr{S}}$:

$$\delta\Phi_{\text{ext}\to\mathscr{S}} = \Phi_{\text{entrant en } x} + \Phi_{\text{entrant en } x+dx} = \iint_{S \text{ en } x} \vec{j_Q}(x,t)\vec{dS} + \iint_{S \text{ en } x+dx} \vec{j_Q}(x+dx,t)\vec{dS}$$

$$= j_x(x,t)S - j_x(x+dx,t)S = -\frac{j_x(x+dx,t) - j_x(x,t)}{\mathrm{d}x}\underbrace{S\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial j_x(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}\tau$$

Alors on a, $\delta\Phi_{\text{ext}\to\mathscr{S}} = -\dfrac{\partial j_x(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}\tau = 0 \iff \dfrac{\partial j_x(x,t)}{\partial x} = 0$

D'après la loi de Fourier : $\vec{j_Q} = -\lambda\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\vec{u}_x$

On fait la projection de $\vec{j_Q}$ sur l'axe Ox : $j_x = -\lambda\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{K}{T}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$

On remplace dans l'équation précédemment trouvée : $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{K}{T}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) = 0$

On intègre une première fois : $\dfrac{K}{T}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = C_1$ puis séparation des variables d'intégration : $\dfrac{\mathrm{d}T}{T} = \dfrac{A}{K}\mathrm{d}x$

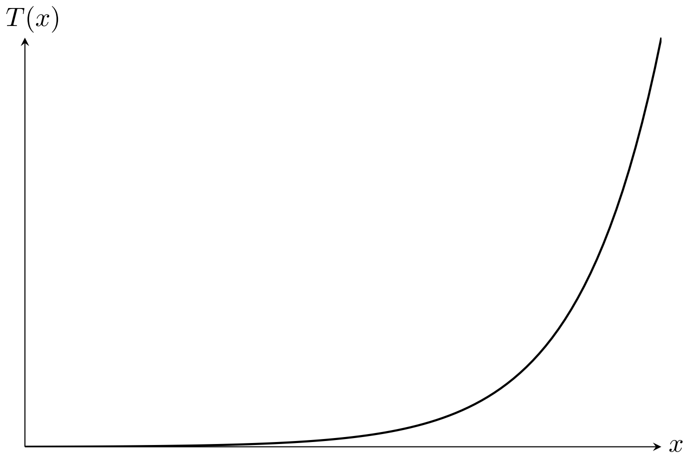
On intègre une nouvelle fois: $\ln(T(x)) = \dfrac{C_1}{K}x + C_2 \iff \boxed{T(x) = \exp\left(\dfrac{A}{K}x + C_2\right)}$

2. En utilisant les conditions limites on a :

$$\begin{cases} T(0) = T_0 = \exp(C_2) \implies C_2 = \ln(T_0) \\ T(L) = T_1 = T_0\exp\left(\dfrac{A}{K}L\right) \implies A = \dfrac{L}{K}\ln\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right) \end{cases}$$

Finalement on obtient : $\boxed{T(x) = T_0\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{x}{L}}}$

Graphiquement on obtient :



3. On fait un bilan global d'enthalpie à $\mathscr{S}$:

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}U = \delta Q_{\text{ext}\to\mathscr{S}} + \delta Q_p \quad \xrightarrow{\times \frac{1}{\mathrm{d}t}} \quad \underbrace{\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}}_{=0 \text{ RS}} = \Phi_{\text{ext}\to\mathscr{S}} + P \quad \text{Donc,} \quad \Phi_{\text{ext}\to\mathscr{S}} = -P$$

Or, on a aussi : $\Phi_Q = \iint_S \vec{j_Q} \cdot \vec{dS} = j_x S = -\lambda S \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\lambda S \dfrac{T_0}{L} \ln\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right) \left(\dfrac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{x}{L}}$

Ainsi, on obtient : $P_{\text{transmise}} = \lambda S \dfrac{T_0}{L} \ln\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right) \left(\dfrac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{x}{L}}$

Donc,

$$\boxed{\begin{cases} P_{\text{transmise}} = \lambda S \dfrac{T_0}{L} \ln\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right) & \text{pour } x = 0 \\ P_{\text{transmise}} = \lambda S \dfrac{T_1}{L} \ln\left(\dfrac{T_1}{T_0}\right) & \text{pour } x = L \end{cases}}$$