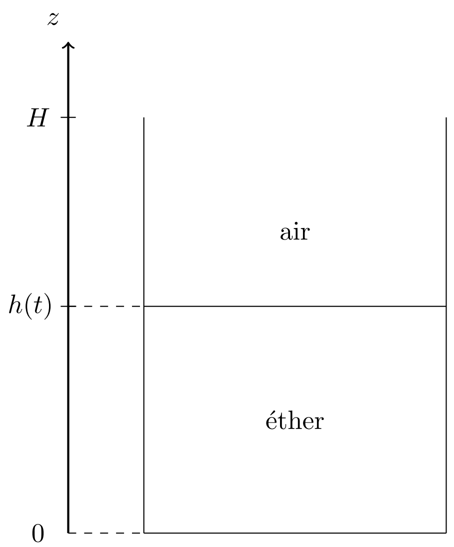
Évaporation de l'éther

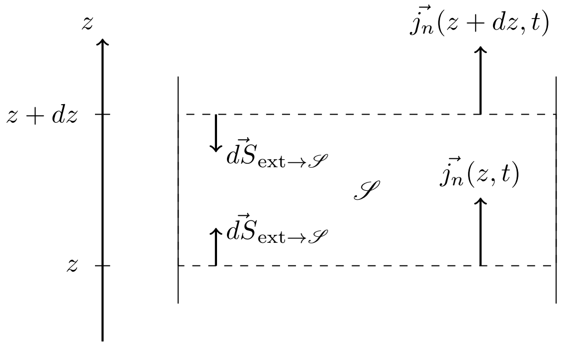
Faisons un schéma de l'expérience,



D'après l'énoncé,

- À $t = 0$ s on a $h_0 = 5$ cm
- $P_{\text{éther}}(z = h(t)) = P_{\text{sat}}(T_0)$
- $P_{\text{éther}}(z = H) = 0$

1. Définissons un volume élémentaire $\mathscr{S}$



Faisons un bilan local de particules à $\mathscr{S}$,

$$dN^2 = \delta^2 N_{\text{crée}} + \delta^2 N_{\text{éch}}$$

Comme on a pas de particules crées et qu'on est en régime quasi-stationnaire,

$$\frac{d^2N}{dt^2} = 0 = \delta\Phi_{N,\text{ext}\to\mathscr{S}}$$

Exprimons la variation du flux élémentaire de particule,

$$\delta\Phi_{N,\text{ext}\to\mathscr{S}} = \Phi_{N,\text{entrant en } z} + \Phi_{N,\text{entrant en } z+dz} = \iint_{\text{S en } z} \vec{j}_n(z) d\vec{S} + \iint_{\text{S en } z+dz} \vec{j}_n(z+dz) d\vec{S}$$

$$= j_z(z)S - j_z(z+dz)S = -\frac{(j_n(z+dz) - j_n(z))}{dz} S dz = -\frac{dj_z}{dz} d\tau$$

Finalement, avec la loi de Fick projeté selon Oz, $j_z = -D\dfrac{dn}{dz}$,

$$\delta\Phi_{N,\text{ext}\to\mathscr{S}} = \frac{d^2n}{dz^2} = 0$$

On peut donc intégrer l'équation différentielle,

$$\frac{d^2n}{dz^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad n(z) = Az + B$$

Déterminons maintenant les conditions aux limites, la relation des gaz parfait nous donne,

$$PV = nRT \quad \longrightarrow \quad P = \frac{N}{V}\frac{R}{\mathscr{N}_A}T \quad \longrightarrow \quad P = nk_BT \quad \longrightarrow \quad n(z) = \frac{P_{\text{éther}(z)}}{k_BT_0}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} n(z=H) = \dfrac{P_{\text{éther}}(H)}{k_BT_0} = 0 = AH + B \quad \Rightarrow \quad B = -AH \\ n(z=h(t)) = \dfrac{P_{\text{éther}}(h(t))}{k_BT_0} = \dfrac{P_{\text{sat}}(T_0)}{k_BT_0} = Ah(t) + B = A(h(t) - H) \end{cases}$$

Finalement on obtient,

$$\boxed{n(z) = \frac{P_{\text{sat}}(T_0)}{k_BT_0}\frac{z-H}{h(t)-H}}$$

2. Déterminons maintenant le flux de l'éther à l'interface, on sait que d'après la loi de Fick,

$$\vec{j_n} = -D\frac{dn}{dz}\vec{e_z} = -D\frac{P_{\text{sat}}(T_0)}{k_BT_0(h(t)-H)}\vec{e_z}$$

Exprimons le flux d'éther à l'interface,

$$\Phi_{\text{éther}} = \iint_{\text{S}} \vec{j}_n d\vec{S} = -D\frac{P_{\text{sat}}(T_0)}{k_BT_0(h(t)-H)}S$$

Finalement, en valeur absolue on obtient,

$$\boxed{\Phi_{\text{éther}} = \frac{DSP_{\text{sat}}(T_0)}{k_BT_0(h(t)-H)}}$$

3. Exprimons le nombre de molécules d'éther en fonction des données,

$$N_{\text{éther}} = n_{\text{éther}}\mathscr{N}_A = \frac{m_{\text{éther}}}{M_{\text{éther}}}\mathscr{N}_A = Sh(t)\frac{\mu_{\text{éther}}}{M_{\text{éther}}}\mathscr{N}_A$$

Ainsi, on obtient le nombre de molécules d'éther dans le bécher,

$$\boxed{N_{\text{éther}} = Sh(t)\frac{\mu_{\text{éther}}}{M_{\text{éther}}}\mathscr{N}_A}$$

Faisons un bilan global de particules à $\mathscr{S}$,

$$\frac{dN_{\text{éther}}}{dt} = \Phi_{N,\text{ext}\to\mathscr{S}} \quad \longrightarrow \quad \dot{h}(t)\,\frac{\mu_{\text{éther}}}{M_{\text{éther}}}S\mathscr{N}_A = \frac{DSP_{\text{sat}}(T_0)}{k_BT_0(h(t)-H)}$$

Ainsi on obtient l'équation différentielle suivante,

$$\boxed{\dot{h}(t)(h(t)-H) = \frac{DP_{\text{sat}}(T_0)M_{\text{éther}}}{k_BT_0\mu_{\text{éther}}\mathscr{N}_A}}$$

4. Réarrangeons l'équation différentielle en séparant les variables,

$$(h(t) - H)dh = Dn_1 \frac{M_{\text{éther}}}{\mu_{\text{éther}} \mathcal{N}_A} dt \quad \text{avec} \quad n_1 = \frac{P_{\text{sat}}(T_0)}{k_B T_0}$$

Intégrons maintenants cette équation,

$$\int_{h_0}^{0} (h(t - H)dh = Dn_1 \frac{M_{\text{éther}}}{\mu_{\text{éther}} \mathcal{N}_A} \int_0^T dt \quad \longrightarrow \quad -\frac{1}{2} h_0^2 + H h_0 = Dn_1 \frac{M_{\text{éther}}}{\mu_{\text{éther}} \mathcal{N}_A} T$$

Finalement on obtient,

$$\boxed{T = \frac{\mu_{\text{éther}} \mathcal{N}_A h_0}{Dn_1 M_{\text{éther}}} \left(H - \frac{h_0}{2} \right) \quad \text{avec} \quad n_1 = \frac{P_{\text{sat}}(T_0)}{k_B T_0}}$$

L'application numérique donne, $T \simeq 18\,\text{h}$

5. Pour vérifier l'hypothèse de quasi-stationnarité prenons l'équation de diffusion,

$$\frac{dn}{dt} = -D \frac{d^2 n}{dz^2}$$

Passons en ordre de grandeur,

$$\frac{n^*}{T_{\text{diff}}} \simeq D \frac{n^*}{H^2}$$

Ainsi on obtient,

$$\boxed{T_{\text{diff}} \simeq \frac{H^2}{D} = 60\,\text{s}}$$

On se retrouve donc bien avec, $T_{\text{diff}} \ll T$

Ainsi, **l'hypothèse de quasi-stationnarité est bien justifiée**.