Forme d'une tuyère

On s'intéresse à un écoulement unidimensionnel (suivant x) d'un gaz parfait en régime stationnaire dans un cylindre de section variable, la tuyère. On supposera le fonctionnement réversible et les bords athermes : l'écoulement est isentropique. On se placera dans le référentiel de la tuyère.
Les notations sont les suivantes : $S(x)$ est la section de la tuyère à la cote x, et $r(x)$, son rayon ; $P(x)$, la pression ; $T(x)$, la température ; $v(x)$, le volume massique ; $c(x)$, la vitesse du gaz. Pour les applications numériques, on s'intéressera par exemple à l'air : on prendra $M = 29\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ et $\gamma = 1.4$.

1. Faire un bilan pour un système ouvert infinitésimal (de longueur dx) sur l'enthalpie massique h. De même, faire un bilan d'entropie massique s.
   Déduire de ces deux bilans la relation :
   $$v\,dP = -c\,dc \tag{1}$$

2. Écrire la conservation du débit vérifiée par $S(x)$, $c(x)$ et $v(x)$. La dérivé pour obtenir la relation (2).

3. Montrer que $dP = c_{son}^2 d\mu$ si l'écoulement est isentropique. Que vaut c_{son} ? Application numérique pour $T = 300\mathrm{K}$. Dans la suite, on considérera que c_{son} est une constante (la température varie peu). Montrer alors la relation :
   $$dP = -\left(\frac{c_{son}}{v}\right)^2 dv \tag{3}$$

4. Grâce aux trois relations, montrer que $S(x)$ et $c(x)$ vérifient la formule d'*Hugoniot* :
   $$\frac{dS}{S} = \frac{dc}{c}\left(\frac{c^2}{c_{son}^2} - 1\right)$$
   Comment varie S en fonction de c ?

5. On supposera connu $c(x)$. Intégrer alors S en fonction de c.